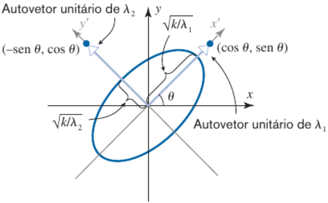
Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL)

$$
\begin{aligned}
ax^2 + by^2 + cxy &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= X^t A X, \quad \bar{X} = Q^t X \\
&= \bar{X}^t D \bar{X} \\
&= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2.
\end{aligned}
$$



Prof. Reginaldo Demarque
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN

31 de julho de 2025

Sumário

Sumário

Matrizes

Uma matriz A, de tamanho $m \times n$, é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas, e será representada como:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dizemos que a_{ij} é o elemento ou a entrada de posição i, j da matriz A. Denotamos por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ cujos elementos são números reais.

Quando $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n. Neste caso, os elementos da $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam diagornal principal de A.

Matrizes

Exemplo

São exemplos de matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Soma de Matrizes

A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo

A soma das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$, $B = \alpha A$, obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, isto é,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo

A multiplicação da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar $\alpha = -3$ é a matriz

$$B = -3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$, definimos o produto de A por B como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

e

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 12 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para Casa 1

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA.

Propriedades das operações com Matrizes

Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

1. $A + B = B + A$ (comutatividade da soma)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade da soma)
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (associatividade do produto por escalar)
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributividade do produto por escalar)
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributividade do produto por escalar)
6. $A(BC) = (AB)C$ (associatividade do produto)
7. $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$ (distributividade)

Exemplo

Se A e B são matrizes quadradas, então vale a identidade?

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

Matriz Identidade

A matriz $n \times n$, definida por

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada de matriz identidade, é o **elemento neutro da multiplicação**, isto é,

$$AI_n = I_m A = A,$$

para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Matriz Transposta

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denotada por A^t, é a matriz obtida a partir de A trocando-se as linhas com as colunas, isto é, $A^t = (b_{ij})_{n\times m}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para cada $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$.

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da Transposta

Sejam A e B matrizes com tamanhos apropriados e $\alpha, \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Para Casa 2

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de x tal que $AB^t = 0$, onde 0 é a matriz nula, isto é, com todas as entradas sendo zero.

2. Calcule M^3, onde
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Calcule o produto entre as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Em seguida, calcule $A^t B^t$.

Operações com matrizes usando o sympy

```
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[1, 2,-3],[3, 4,0]])
B=sp.Matrix([[-2,1,5],[0,3,-4]])
C=sp.Matrix([[-2,1,0],[0,3,0],[5,-4,0]])
S=A+B
display(S)
P=A*C
display(P)
T=A.T
display(T)
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix},\ AC = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 2 \\ -6 & 15 & 4 \end{bmatrix},\ A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Um espaço vetorial real V é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações:

- A adição, que a cada par de vetores $\vec{u}$,$\vec{v} \in V$ faz corresponder um novo vetor $\vec{u}+\vec{v}$, chamado vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- A multiplicação por escalar, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $\vec{v} \in V$ faz corresponder um vetor $\alpha\vec{v}$, chamado produto de α por $\vec{v}$.

Além disso, essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes condições:

Espaços Vetoriais Reais

1. $\vec{u} + \vec{v} \in V$. (fechamento em relação à adição)
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatividade)
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associatividade)
4. Existe um vetor $\vec{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \text{ para todo } \vec{u} \in V.$$

5. Para cada $\vec{v} \in V$, existe um vetor $\vec{-v} \in E$, chamado inverso aditivo, ou simétrico de $\vec{v}$, tal que

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}.$$

6. $\alpha\vec{v} \in V$. (fechamento em relação à multiplicação por escalar)
7. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ e $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{v}$. (distributividade)
8. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^n$

O conjunto da matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, com as operações de soma e multiplicação por escalar, formam um espaço vetorial real.

Em particular, o conjunto das matrizes coluna (ou matrizes linhas) será denotado por $\mathbb{R}^n$, e a seus elementos chamaremos vetores. Neste caso, usaremos a seguinte notação $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, o que significa

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ ou } \vec{v} = [x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

tais que $v_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Um nutricionista forneceu uma tabela que especifica a quantidade mínima de cada tipo de vitamina que deve ser ingerida diariamente.

Tipo de vitamina	A	B	C	E
Quantidade mínima (mg)	3	1.1	60	11

Ele também forneceu uma tabela com a quantidade (em mg) de vitaminas em cada 100 gramas de 4 tipos de alimentos diferentes,

	Alimento			
Vitamina	1	2	3	4
A	0.140	0.580	0.150	0
B	0.08	0	1.30	0.08
C	0	0	26	38
E	1.60	0	6.90	0.2

Cada alimento é uma variável, ou seja,

x_i representa a quantidade (em "pacotes" de 100g) do alimento i que deve ser consumido diariamente, com $i = 1, \ldots, 4$.

Com isso, se quisermos saber qual a quantidade de cada alimentos devemos consumir, para se ter a quantidade mínima de cada vitamina, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 0.14x_1 + 0.58x_2 + 0.15x_3 = 3, \\ 0.08x_1 + 1.3x_3 + 0.08x_4 = 1.1, \\ 26x_3 + 38x_4 = 60, \\ 1.6x_1 + 6.9x_3 + 0.2x_4 = 11, \end{cases}$$

Usando a notação vetorial, temos:

$$\begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0 \\ 1.60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.150 \\ 1.30 \\ 26 \\ 6.90 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \\ 38 \\ 0.2 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.1 \\ 60 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Aprenderemos mais à frente que este sistema tem a seguinte solução

$$x_1 \approx 4.63,\ x_2 \approx 3.93,\ x_3 \approx 0.484 \ \text{ e } \ x_4 \approx 1.25.$$

Isto é, para se ingerir a quantidade mínima de cada tipo de vitamina devemos consumir:

463.0 gramas do alimento 1
393.0 gramas do alimento 2
48.4 gramas do alimento 3
125.0 gramas do alimento 4

Sumário

Sistemas de Equações Lineares

Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais.
Um sistema de m equações lineares a n incógnitas é um conjunto de m equações lineares, isto é,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Sistemas de Equações Lineares

Usando o produto matricial, o sistema linear pode ser escrito da seguinte forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}.$$

Uma solução de um sistema linear a n incógnitas é qualquer vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação matricial $AX = B$ associada ao sistema. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado conjunto solução ou solução geral do sistema.

Exemplo

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem infinitas soluções, algumas delas são os vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como resolver Sistemas Lineares?

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. Anteriormente, para resolver o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Fizemos uma operação elementares que o transformou no sistema mais simples de resolver

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0, \end{cases}$$

cujo conjunto solução é:

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{R}. \right\}.$$

Esse procedimento pode ser generalizado.

Método de Eliminação

O método utilizado acima é conhecido como método de eliminação, pois ao aplicá-lo, estamos "eliminando incógnitas".

Dizemos que dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. Obtemos sistemas equivalentes ao aplicarmos as chamadas operações elementares.

Operações Elementares

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Matriz Aumentada

Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear, somente os coeficientes do sistema são alterados, assim trabalharemos apenas com a chamada matriz aumentada do sistema, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

Ilustrando com o exemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \to -2L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

Neste caso, as operações elementares sobre o sistema se traduzem para as seguintes operações elementares sobre matrizes:

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

As três operações elementares sobre as linhas de uma matriz A são:

- Trocar a posição de duas linhas da matriz A;
- Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

Definição 1

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é linha-equivalente a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, quando B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre suas linhas.

Para Casa 3

Usando a técnica aprendida, resolva o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ 3x + y + 5z = 1 \end{cases}$$

Escalonamento

O escalonamento é uma técnica que nos permite resolver sistemas lineares de uma forma geral. Ele consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até obtermos uma matriz na forma conhecida como matriz escalonada. A saber, uma matriz está na forma escalonada quando satisfaz:

1. Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
2. O pivô (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha ocorre à direita do pivô da linha anterior.

As seguintes matrizes estão na forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

Exemplo

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 4z = 20 \\ 2x + 3y + 5z = 25 \end{cases}$$

Exercício

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

Exercício

Reduza a seguinte matriz à forma escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Posto de uma matriz

Definição 2

O posto de uma matriz A é o número de linhas não nulas em sua forma escalonada, que será denotado por $\text{posto}(A)$.

Exemplo

Resolva o sistema e determine o posto da matriz aumentada.

$$\begin{cases} -9w + 3z = 6 \\ 40w + 5x + 15y - 10z = -45 \\ 5w + x + 3y - z = -7 \end{cases}$$

Variáveis Livres

Uma matriz escalonada para o sistema anterior é:

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

cuja solução geral é:

$$X = \{(-2w - 3y - 5,\ y,\ 3w + 2,\ w)\}$$

A matriz desse sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs são chamadas de variáveis livres, isto é, podem assumir valores arbitrários. Assim, na solução geral, as variáveis associadas aos pivôs terão seus valores dependentes das variáveis livres.

Sistema impossível

Um sistema linear $AX = B$, onde $A = (a_{ij})_{m \times n}$, não admite solução quando

$$\text{posto}([A|B]) > \text{posto}(A).$$

Neste caso, dizemos que o sistema é impossível.

Nulidade

Por motivos que ficarão claros nas aulas posteriores, ao número de variáveis livres, daremos o nome de nulidade.

Teorema 3 (Teorema do Posto)

Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a matriz dos coeficiente de um sistema com n variáveis. Se o sistema for possível, então

$$\text{nulidade}(A) + \text{posto}(A) = n.$$

Classificação

Classificação de sistemas lineares

Um sistema linear $AX = B$, onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$, admite uma das seguintes alternativas:

Se $\text{posto}([A|B]) > \text{posto}(A)$, então não possui solução, isto é, sistema impossível.

Caso contrário,

- Se $\text{posto}(A) = n$, então possui uma única solução.
- Se $\text{posto}(A) < n$, então possui infinitas soluções.

Para Casa 4

Resolva os sistema: $AX = B$, $AX = C$ e $AX = D$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando o sympy para resolver systemas lineares

O `sympy` é uma poderosa ferramenta para resolver equações, especialmente as lineares. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1, \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

Usando o `linsolve` obtemos a solução geral do sistema:

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
sol=sp.linsolve((A,B),x,y,z)
display(sol)
```

$$X = \left\{\left(-\frac{3z}{7} - \frac{1}{7},\ \frac{1}{7} - \frac{4z}{7},\ z\right)\right\}$$

Usando o `solve` obtemos a solução geral do sistema:

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
sistema=sp.Eq(A*X,B)
sol=sp.solve(sistema,(x,y,z))
display(sol)
```

$$X = \left\{ x : -\frac{3z}{7} - \frac{1}{7},\ y : \frac{1}{7} - \frac{4z}{7} \right\}$$

Podemos também obter a matriz escalonada da seguinte forma

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
Ma=sp.Matrix.hstack(A,B)
Me=Ma.echelon_form()
display(Me)
```

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

O método usado para resolver os sistemas anteriores, isto é, transformar a matriz aumentada em uma escalonada é conhecido como Método de Gauss.

Uma variação deste método, conhecido como Método de Gauss-Jordan, consiste em transformar a matriz aumentada na chamada matriz escalonada reduzida. A saber, uma matriz esta na forma escalonada reduzida quando além de escalonada ela satisfaz:

a. O pivô de cada linha é 1;
b. Se uma coluna contém um pivô, então todos os outros elementos são iguais a zero.

A seguinte matriz está na forma escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vimos anteriormente que o sistema

$$\begin{cases} -9w + 3z = 6 \\ 40w + 5x + 15y - 10z = -45 \\ 5w + x + 3y - z = -7, \end{cases}$$

tem matrizes aumentada e escalonada respectivamente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se continuarmos o processo de escalonamento chegaremos à matriz escalonada reduzida

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exemplo

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ -8x + 3y - 3z = -2, \end{cases}$$

Exemplo

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + z\left(a^2 - 14\right) = a + 2, \end{cases}$$

Para Casa 5

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \end{cases}$$

Para Casa 6

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + z\left(a^2 - 1\right) = a + 1, \end{cases}$$

Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear da forma $AX = 0$ é dito homogêneo, isto é, um sistema da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases}$$

Propriedades

- Todo sistema homogêneo tem pelo menos uma solução, a chamada solução trivial, isto é, $X = 0$.
- Todo sistema homogêneo com menos equações que incógnitas $(m < n)$ tem infintas soluções.
- Se X e Y são soluções de um sistema homogêneo, então $X + Y$ também o é.
- Se X é solução de um sistema homogêneo, etnão αX também o é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sumário

Matriz Inversa

Definição 4

Dizemos que uma matriz quadrada A, de ordem n, é invertível ou não singular, se existe uma matriz B, também de ordem n tal que

$$AB = BA = I_n,$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada inversa de A e é denotada por A^{-1}. Se A não tem inversa, dizemos que A não é invertível ou é singular.

Exemplo

A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Proposição 5

1. Para saber se A é invertível, basta verificar uma das identidades:

$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n.$$

2. Uma matriz é invertível se, e somente se, é linha-equivalente à matriz identidade.

Exemplo

Verifique se a seguinte matriz é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

Verifique se a seguinte matriz é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para Casa 7

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis e em caso positivo, calcule a inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades

1. A inversa, quando existe, é única.
2. Se A é invertível, então sua inversa também o é e vale $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
4. Se A é invertível, então A^t também o é e vale
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$
5. Um sistema $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso, a solução é $X = A^{-1}B$.

Invertendo matrizes com o sympy

```
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[1, 2,3],[1,1,3],[0,1,2]])
B=sp.Matrix([[1,1,1,1],[1,2,-1,2],[1,-1,2,1],[1,3,3,2]])
invA=A.inv()
invB=B.inv()
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Sumário

Determinantes

o determinante de uma matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

denotado por $\det(A)$, é o número real formado pela soma de todos os possíveis produtos de n elementos que aparecem em diferentes linhas e diferentes colunas, precedidos por um sinal de $+$ ou $-$, segundo uma regra que será estabelecida. Isto é, todas as somas de elementos do tipo:

$$\pm a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$$

Por exemplo: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$ ou $\pm a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44} \cdots a_{nn}$ ou $\pm a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{44} \cdots a_{nn}$

Como calcular Determinantes

- **Matrizes** 1×1:

$$\det(A) = \det([a_{11}]) = a_{11}.$$

- **Matrizes** 2×2:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Exemplo

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 20 \end{bmatrix} = 2 \cdot 20 - 2 \cdot (-1) = 42$$

Se A for uma matriz quadrada de ordem n, denotaremos por A_{ij} a submatriz de A, de ordem $n-1$, obtida mediante a omissão da i-ésima linha e da j-ésima coluna de A.

Definição 6

Dada uma matriz quadrada A. Definimos o menor do elemento a_{ij} como $\det(A_{ij})$. E o cofator do elemento a_{ij} como

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $A_{12} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. E o cofator do elemento a_{12} é $c_{12} = -\det(A_{12}) = -(-2-(-2)) = 0$.

Determinantes ordem $n > 2$

Definição 7

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n > 2$. Definimos o determinante de A indutivamente por:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}).$$

Essa soma é chamada de expansão em cofatores do determinante de A.

Exemplo

Calcule o determinate da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 8

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O determinante de A pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo qualquer linha ou qualquer coluna.

Exemplo

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinantes com o sympy

```
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[1,0,3,1],[-1,3,2,5],[0,0,2,3],[2,1,-2,0]])
A.det()
```

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 63$$

Um restaurante no fim do universo

Para se calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ pela expansão em cofatores, precisamos fazer n produtos e calcular n determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$, que por sua vez vai precisar calcular $n-1$ produtos e assim por diante. Portanto, ao todo são necessários da ordem de $n!$ produtos.

Mesmo um supercomputador não pode calcular determinantes de matrizes moderadamente grandes usando cofatores!

Para se calcular o determinante de uma matriz 50×50, é necessário se realizar $50! \approx 3 \times 10^{64}$ produtos. Um supercomputador pode realizar da ordem de 10^{17} (100 quadrilhões) operações por segundo. Portanto, precisaria de 3×10^{47} segundos para calcular esse determinante, isto é, aproximadamente 10^{39} anos!. A estimativa da idade do universo é de 10 bilhões de anos, isto é 10^{10}.

O determinante é um função n-linear das linhas ou das colunas. Vamos precisar o que isto quer dizer.

Podemos representar uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ em termos de suas linhas, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

em que A_i é a i-ésima linha, ou seja, $A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$.
Suponha que uma linha A_k é decomposta como uma combinação linear de dois vetores linhas, isto é, $A_k = \alpha X + \beta Y$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$.

Então,

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \alpha X + \beta Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Esta propriedade também vale para as colunas.

Exemplo

Calcule o determinante

$$\det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2\cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t) & 2\sin(t) + 3\cos(t) \end{bmatrix}$$

Cálculo de Determinantes por Redução por linhas

- Se uma matriz A possui duas linhas ou duas colunas iguais, então

$$\det(A) = 0.$$

- Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α, então

$$\det(B) = \alpha \det(A).$$

- O determinante é uma função alternada, isto é, Se B resulta de A pela troca da posição de duas linhas ou colunas, então

$$\det(B) = -\det(A).$$

- Se B é obtida de A substituindo-se uma linha pela soma dela com um múltiplo escalar de outra linha, então

$$\det(B) = \det(A).$$

- O determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é o produto dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Exemplo

Calcule o determinante da seguinte matriz transformando-a em uma matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: $\det(A) = 585$.

Propriedades dos Determinantes

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(A^t) = \det(A)$.
- A é invertível se, e somente se $\det(A) \neq 0$. Neste caso,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- O sistema homogêneo $AX = 0$ tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A) = 0$.

Exemplo

Seja

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema $TX = \lambda X$ tem solução não trivial.

Fórmula da Inversa para matrizes 2×2

Um matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e somente se, $\det(A) = ad - bc \neq 0$ e neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$