



Soluções dos Para Casa

Vetores, Matrizes e Sistemas Lineares



1.

Localize os pontos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 0)$, $C = (4, 1)$, $D = (2, -3)$ e $E = (3, -2)$ no plano cartesiano. Determine as coordenadas dos vetores abaixo e esboce um de seus representantes.

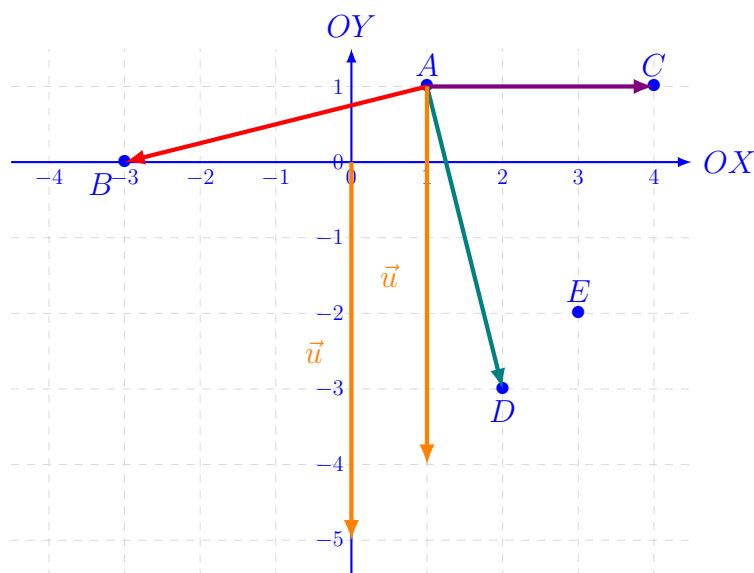
(a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

(b) $\vec{v} = 2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{AD}$

Solução:

(a)

$$\vec{u} = (-4, -1) + (3, 0) + (1, -4) = (0, -5)$$



(b) Note que $\overrightarrow{BC} = (7, 1)$, $\overrightarrow{EC} = (1, 3)$, $\overrightarrow{EA} = (-2, 3)$ e $\overrightarrow{AD} = (1, -4)$. Daí,

$$\vec{v} = 2(6, -2) + 3(-2, 3) - 2(1, -4) = (12, -4) + (-6, 9) + (2, -8) = (4, 13)$$



2.

Normalize os vetores $\vec{u} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$ e $\vec{v} = (4, -\sqrt{2}, 0, -5)$.



3.

Considere as matrizes $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e os vetores $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(a) Esboce o triângulo ABC que tem como vértices as extremidades dos vetores.



- (b) Calcule $u' = Ru$, $v' = Rv$ e $w' = Rw$. Esboce o novo triângulo $A'B'C'$ com vértices dados pelos novos vetores.
- (c) Calcule $u'' = Su'$, $v'' = Sv'$ e $w'' = Sw'$. Esboce o triângulo $A''B''C''$ com vértices dados pelos novos vetores.
- (d) Calcule $M = SR$. Esboce o triângulo com vértices em Mu , Mv e Mw .

Solução:

(a) Todos os esboços estão feito abaixo. Vamos fazer os cálculos dos vetores.

$$(b) \quad u' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad u'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } w'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

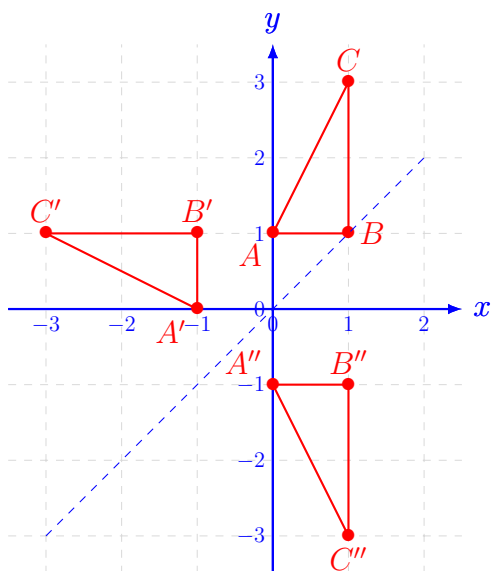
(d) Por fim,

$$M = SR = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donde,

$$Mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = u'', \quad Mv = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = v'' \text{ e}$$

$$Mw = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = w''.$$



4.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA .



Solução:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$



5.

(a) Sejam $A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de x tal que $AB^t = 0$, onde 0 é a matriz nula, isto é, com todas as entradas sendo zero.

(b) Calcule M^3 , onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução:

(a)

$$AB^t = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 11.$$

(b)

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^3 = M^2 M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



6.

(a) Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1)$.

(b) Um retângulo tem vértices nos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 6, -2)$ e $C = (0, 5, -4)$. Determine o ponto D .



7.

(a) Considere os pontos $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, 1, -1)$. Determine a reta r que passa por A e B .

(b) Sejam $A = (0, 1, 8)$, $B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C .

Solução:



(a) Note que $\vec{AB} = (-2, 2, -1)$, daí,

$$r : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2t - 1 \\ z = -t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Como $C \in r$, temos que $C = (t + 1, t + 2, -3t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Como o ângulo reto é em C , então

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow (-t - 1, -t - 1, 3t + 8) \cdot (-t - 4, -t - 2, 3t + 9) = 0.$$

Donde,

$$11t^2 + 59t + 78 = 0 \Rightarrow t_1 = -3, t_2 = -\frac{26}{11}.$$

Logo, os pontos buscados são

$$C_1 = (-2, -1, 9) \text{ e } C_2 = \left(-\frac{15}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{78}{11}\right).$$



8.

- (a) Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, -5)$ e tem coeficiente angular igual a 5.
- (b) Esboce no plano a reta cuja equação é dada por $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.



9.

Usando a técnica aprendida, resolva o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ 3x + y + 5z = 1 \end{cases}$$

Solução: Multiplicando-se a 2ª linha por 2 e somando-se à primeira, temos

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ y + 11z = 2 \end{cases}$$

Donde conclui-se que

$$x = 2z - \frac{1}{3} \text{ e } y = 2 - 11z$$



10.

Resolva os sistema: $AX = B$ e $AX = C$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução: Como a matriz A é a mesma pra ambos os sistemas, podemos escalonar a matriz aumentada $[A|B \ C]$, uma vez que o mesmo escalonamento serve para os dois sistemas.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad L_2 \rightarrow -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com isso vemos que o sistema $AX = C$ não tem solução, pois a última linha do escalonamento foi $0 = 1$, um absurdo.

Quanto ao sistema $AX = B$, temos que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + z = 4, \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$X = \{(9 - 3\alpha, 4 - \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}.$$



11.

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right] \quad L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Voltando ao formato de sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 + 2x_6 = 1 \\ x_5 + x_6 = 2. \end{cases}$$

Fazendo $x_2 = \alpha$, $x_4 = \beta$ e $x_6 = \gamma$ escrevemos a solução geral:

$$S = \{(-2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha, 1 - 2\gamma, \beta, 2 - \gamma, \gamma); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$



12.

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + z(a^2 - 1) = a + 1, \end{cases}$$

Solução: Para isso, vamos colocar o sistema na forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & a^2 - 1 & a + 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 3 & a - 3 \end{array} \right] \quad L_2 \rightarrow L_3 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 & a - 4 \end{array} \right]$$

A partir desta matriz, podemos concluir que o sistema:

- não terá soluções quando $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 \neq 0$, isto é, quando $a = \pm\sqrt{3}$
- terá infinitas soluções quando $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 = 0$, isto é, nunca terá infinitas soluções.
- terá uma única solução quando $a^2 - 3 \neq 0$ e $a - 4 \neq 0$, isto é, quando $a \neq \pm\sqrt{3}$ e $a \neq 4$.

Em resumo, se $a = \pm\sqrt{3}$ o sistema não tem soluções, se $a \neq \pm\sqrt{3}$ o sistema tem uma única solução.



13.

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução: Primeiramente vamos escalonar com a matriz A .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Como a última linha da matriz linha-equivalente é zero, temos que A não é invertível.

Agora, vamos escalonar a matriz B .

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + L_3 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_4 \rightarrow L_3 + L_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Neste passo já sabemos que B é invertível, pois o sistema homogêneo associado a ela tem solução única. Vamos continuar o escalonamento para encontrar a inversa.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \rightarrow 3L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 3L_1 \\ L_2 \rightarrow 3L_2 \\ L_3 \rightarrow 3L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 6 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 9 & -9 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 6 & -9 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 3L_4 \\ L_3 \rightarrow L_2 - 2L_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & -18 & 0 & 6 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \rightarrow \frac{1}{9}L_2 \\ L_3 \rightarrow -\frac{1}{9}L_3 \\ L_4 \rightarrow \frac{1}{3}L_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right].$$

Logo,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Determinantes e Álgebra Linear no $\mathbb{R}^n$



14.
Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, 2, 0)$, $B = (1, 0, 2)$ e $C = (0, 4, 3)$.

Solução: A área do triângulo é dada por

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$$

Como $\vec{AB} = (-2, -2, 2)$ e $\vec{AC} = (-3, 2, 3)$, então $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-10, 0, -10)$ e portanto a área do triângulo é dada por

$$\frac{1}{2} \|(-10, 0, -10)\| = 5\sqrt{2}.$$



15.

(a) Obtenha a reta r dada pela interseção dos planos $\pi_1 : x + y + z = 2$ e $\pi_2 : x - y - z = 0$.

(b) Determine os pontos da reta r que estão à distância $\sqrt{6}$ da reta $s : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = t - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Solução:

(a) Basta resolvermos os sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

Escalonando à forma reduzida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - z \end{cases}$$

Fazendo $z = t$, obtemos

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (b) Portanto, um ponto genérico da reta r é da forma $A = (1, 1 - t, t)$. Queremos determinar t tal que $d(A, s) = \sqrt{6}$. Sabemos que $P = (1, 0, -1) \in s$ e que $\vec{v} = (1, -1, 1)$ é um vetor diretor de s . Com isso,

$$d(A, s) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Como $\overrightarrow{AP} = (0, t - 1, -t - 1)$, então $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (-2, -t - 1, 1 - t)$ e portanto

$$\sqrt{6} = \frac{\|(-2, -t - 1, 1 - t)\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(t - 1)^2 + (t + 1)^2 + 4}}{\sqrt{3}}.$$

Donde,

$$2t^2 + 6 = 18 \Rightarrow t = -\sqrt{6} \text{ ou } t = \sqrt{6}.$$

Logo, os pontos buscados são:

$$A_1 = (1, 1 + \sqrt{6}, -\sqrt{6}) \text{ e } A_2 = (1, 1 - \sqrt{6}, \sqrt{6}).$$



16.

Determinar x para que o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, x, 1)$ seja igual a 15.



17.

Escreva, se possível, os vetores $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos seguintes vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Solução: Para isso, basta escalonar a matriz aumentada com as duas últimas colunas sendo os vetores $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 11 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 8 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Com isso, temos que $\vec{b}_2$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores dados, uma vez que o sistema considerando-se a matriz dos coeficientes e a última coluna não tem solução. Já o sistema considerando-se a matriz dos coeficientes e a penúltima nos dá a seguinte solução:

$$\vec{b}_1 = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3.$$



18.

Para cada caso, diga se o conjunto de vetores é LI ou LD.

(a) $\{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (4, 6, 12)\}$

(b) $\{(0, 3, 1), (6, 0, 5), (4, -7, 1)\}$

Solução:

(a) Basta escalonar a matriz A cujas colunas são os vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ e $\vec{v}_3 = (4, 6, 12)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como este sistema tem única solução, os vetores são LI.

(b) Basta escalonar a matriz B cujas colunas são os vetores $\vec{v}_1 = (0, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (6, 0, 5)$ e $\vec{v}_3 = (4, -7, 1)$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como este sistema tem infinitas solução, os vetores são LD.



19.

Encontre um subconjunto dos vetores

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \vec{v}_2 = (2, -5, -3, 6),$$

$$\vec{v}_3 = (0, 1, 3, 0), \vec{v}_4 = (2, -1, 4, -7), \vec{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$$

que forma uma base para o espaço gerado por eles.



20.

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine os autovalores de A .
- (b) Determine os autoespaços de A .
- (c) Determine uma base para cada autoespaço e a dimensão.

Solução: Vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) (\lambda + 2).$$

A seguir são dados os autovalores e a respectiva base do autoespaço.

$$\lambda = -2, \text{ autovetores: } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda = -1, \text{ autovetores: } \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda = 1, \text{ autovetores: } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$



21.

- (a) Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e obtenha as matrizes diagonal D e a matriz P que diagonaliza A .

- (b) Calcule B^{11} , onde

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

(a) Primeiramente, vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 8)(\lambda - 2)^2.$$

Com isso, temos que os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Agora vamos determinar os autoespaços correspondentes.

Autoespaço $E_2 = \ker(A - 2I)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies E_2 = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Com isso, $\dim E_2 = 2$ e uma base para esse autoespaço é:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Autoespaço $E_8 = \ker(A - 8I)$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies E_8 = \{(\alpha, \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Com isso, $\dim E_8 = 1$ e uma base para esse autoespaço é:

$$\mathcal{B}_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Portanto, as matrizes D e P são

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$