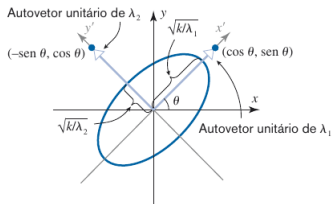


Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL)

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cxy &= [x \ y] \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= X^t AX, \quad \bar{X} = Q^t X \\ &= \bar{X}^t D \bar{X} \\ &= [x \ y] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2. \end{aligned}$$



Prof. Reginaldo Demarque
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN

1 de julho de 2025

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Dieta nutricional

Um nutricionista forneceu uma tabela que especifica a **quantidade mínima de cada tipo de vitamina que deve ser ingerida diariamente**.

Tipo de vitamina	A	B	C	E
Quantidade mínima (mg)	3	1.1	60	11

Ele também forneceu uma tabela com a quantidade (em mg) de vitaminas em cada 100 gramas de 4 tipos de alimentos diferentes,

	Alimento			
Vitamina	1	2	3	4
A	0.140	0.580	0.150	0
B	0.08	0	1.30	0.08
C	0	0	26	38
E	1.60	0	6.90	0.2

Cada alimento é uma **variável**, ou seja,

x_i representa a quantidade (em “pacotes” de 100g) do alimento i que deve ser consumido diariamente, com $i = 1, \dots, 4$.

Com isso, se quisermos saber qual a quantidade de cada alimentos devemos consumir, para se ter a quantidade mínima de cada vitamina, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 0.14x_1 + 0.58x_2 + 0.15x_3 = 3, \\ 0.08x_1 + 1.3x_3 + 0.08x_4 = 1.1, \\ 26x_3 + 38x_4 = 60, \\ 1.6x_1 + 6.9x_3 + 0.2x_4 = 11, \end{cases}$$

Usando a notação vetorial, temos:

$$\begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0 \\ 1.60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.150 \\ 1.30 \\ 26 \\ 6.90 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \\ 38 \\ 0.2 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.1 \\ 60 \\ 11 \end{bmatrix}$$



Aprenderemos mais à frente que este sistema tem a seguinte solução

$$x_1 \approx 4.63, x_2 \approx 3.93, x_3 \approx 0.484 \text{ e } x_4 \approx 1.25.$$

Isto é, para se ingerir a quantidade mínima de cada tipo de vitamina devemos consumir:

463.0 gramas do alimento 1

393.0 gramas do alimento 2

48.4 gramas do alimento 3

125.0 gramas do alimento 4



Código em python

```
import sympy as sp

x1,x2,x3,x4=sp.symbols('x_1 x_2 x_3 x_4',real=True)
X=sp.Matrix([x1,x2,x3,x4])
def pt(Y):
    return((Y[0],Y[1]))

v1=sp.Matrix([0.14,0.08,0,1.6])
v2=sp.Matrix([0.58,0,0,0])
v3=sp.Matrix([0.15,1.3,26,6.9])
v4=sp.Matrix([0,0.08,38,0.2])
B=sp.Matrix([3,1.1,60,11])

A=sp.Matrix.hstack(v1,v2,v3,v4)

AX=A*X
sol=sp.solve(sp.Eq(AX,B),(x1,x2,x3,x4))
```



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores**
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



O conjunto \mathbb{R}^2

Denotamos por \mathbb{R}^2 o conjunto formado pelos **pares ordenados** (x, y) tais x e y são números reais. O número x chama-se **primeira coordenada ou abscissa** e o número y chama-se **segunda coordenada ou ordenada**.

Podemos representar geometricamente os elementos de \mathbb{R}^2 usando um **sistema de coordenadas cartesianas**, que consiste em um plano com um par de eixos perpendiculares OX e OY e que tem a mesma origem.



Exemplo

Em um plano, fixado um sistema de coordenadas cartesianas, represente:

- 1 Os pontos $P = (1, 0)$, $Q = (2, 1)$ e $R = (-3, -2)$.
- 2 Os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$.



Espaços Vetoriais Reais

Um **espaço vetorial real** V é um conjunto, cujos elementos são chamados **vetores**, no qual estão definidas duas operações:

- A **adição**, que a cada par de vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ faz corresponder um novo vetor $\vec{u} + \vec{v}$, chamado **vetor soma** de \vec{u} e \vec{v} .
- A **multiplicação por escalar**, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $\vec{v} \in V$ faz corresponder um vetor $\alpha\vec{v}$, chamado **produto de α por \vec{v}** .

Além disso, essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes condições:



Espaços Vetoriais Reais

- 1 $\vec{u} + \vec{v} \in V$. (fechamento em relação à adição)
- 2 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatividade)
- 3 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associatividade)
- 4 Existe um vetor $\vec{0} \in V$, chamado **vetor nulo**, tal que

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \text{ para todo } \vec{u} \in V.$$

- 5 Para cada $\vec{v} \in V$, existe um vetor $-\vec{v} \in E$, chamado **inverso aditivo**, ou **simétrico** de \vec{v} , tal que

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}.$$

- 6 $\alpha\vec{v} \in V$. (fechamento em relação à multiplicação por escalar)
- 7 $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ e $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$. (distributividade)
- 8 $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.



O Espaço Vetorial \mathbb{R}^2

O conjunto \mathbb{R}^2 torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

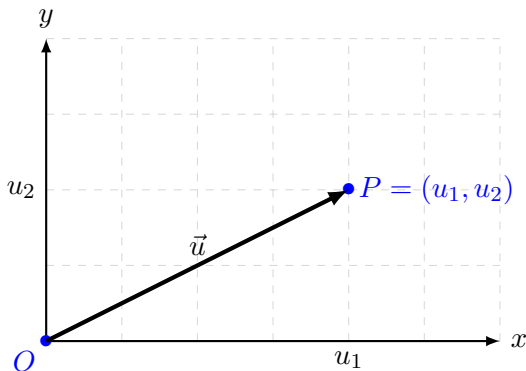
$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

Neste caso, o **vetor nulo** é $\vec{0} = (0, 0)$ e o **simétrico** de \vec{v} é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2)$.



Representação Geométrica

Representamos um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ de \mathbb{R}^2 usando um **segmento orientado** com **ponto inicial** na origem do sistema de coordenadas e **extremidade** no ponto $P = (u_1, u_2)$.



Neste caso, escrevemos $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$.



Norma de um vetor

O **comprimento** de vetor \vec{u} , também chamado de **norma**, é dado por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$



Exemplo

Represente no plano o vetor $\vec{u} = (1, 1)$ e calcule seu comprimento.

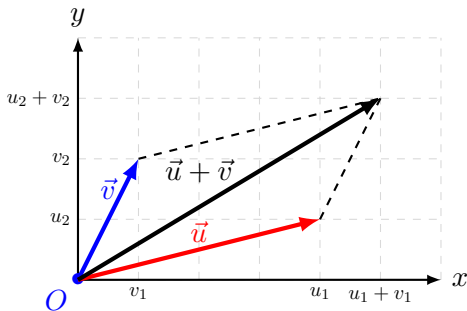


Representação Geométrica da Soma

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de \mathbb{R}^2 o vetor soma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

é obtido pela chamada **lei do paralelogramo**.

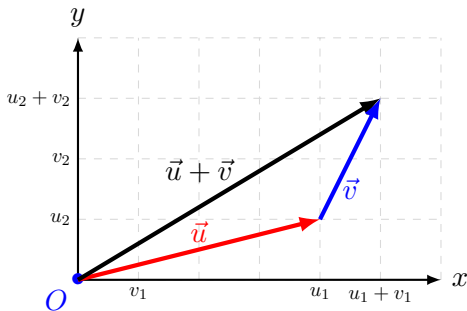


Representação Geométrica da Soma

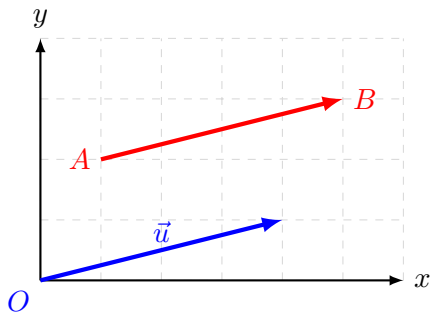
Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de \mathbb{R}^2 o vetor soma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

é obtido pela chamada **lei do paralelogramo**.



Dizemos que um segmento de reta orientado \overrightarrow{AB} também representa um vetor \vec{u} quando os dois têm mesmo comprimento, direção e sentido. Neste caso, escrevemos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$



De uma forma geral temos que

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

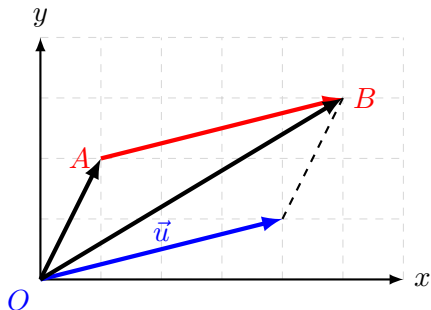


Exemplo

Dados $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 0)$ e $D = (0, 1)$. Mostre que $\vec{AB} = \vec{CD}$ e calcule sua norma.



Basta usar a lei do paralelogramo.



Se $\vec{u} = (x, y)$, então

$$\vec{OA} + \vec{u} = \vec{OB} \Rightarrow (a_1 + x, a_2 + y) = (b_1, b_2),$$

donde

$$\begin{cases} x = b_1 - a_1 \\ y = b_2 - a_2. \end{cases}$$

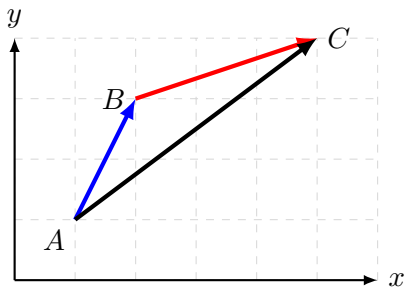


Em resumo, dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, escrevemos

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Além disso, se tomarmos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} , podemos escrever a soma da seguinte forma:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$





Para Casa 1

Localize os pontos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 0)$, $C = (4, 1)$, $D = (2, -3)$ e $E = (3, -2)$ no plano cartesiano. Determine as coordenadas dos vetores abaixo e esboce um de seus representantes.

$$\textcircled{1} \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

$$\textcircled{2} \vec{v} = 2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{AD}$$



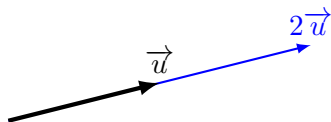
Representação Geométrica do Produto por Escalar

Geometricamente, a **multiplicação escalar** estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



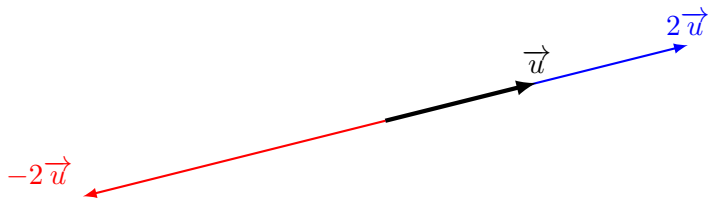
Representação Geométrica do Produto por Escalar

Geometricamente, a **multiplicação escalar** estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



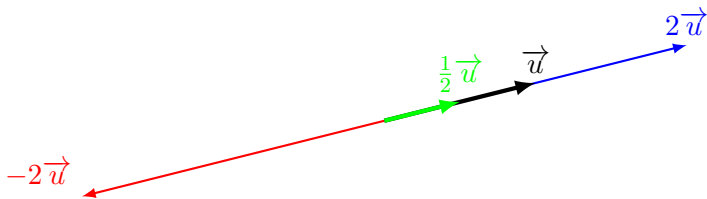
Representação Geométrica do Produto por Escalar

Geometricamente, a **multiplicação escalar** estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



Representação Geométrica do Produto por Escalar

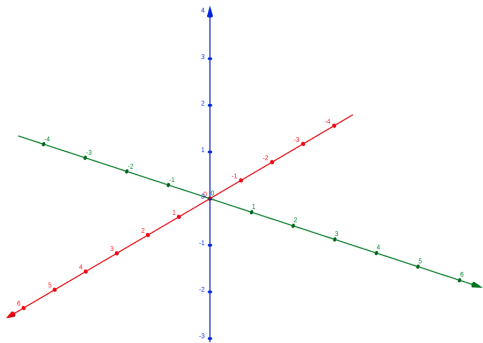
Geometricamente, a **multiplicação escalar** estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



O conjunto \mathbb{R}^3

Denotamos por \mathbb{R}^3 o conjunto formado pelas **triplos ordenadas** (x, y, z) tais x , y e z são números reais.

Podemos representar geometricamente os elementos de \mathbb{R}^3 usando um **sistema de coordenadas cartesianas**, que consiste na escolha de três eixos com a mesma origem, OX , OY e OZ , mutuamente perpendiculares e que a orientação positiva é escolhida de acordo com a **regra da mão direita**.





Exemplo

- 1 Determine os pontos $(1, 3, 1)$ e $(3, -2, 2)$ no sistema cartesiano.
- 2 Esboce o conjunto dos pontos que satisfazem a equação $z = 3$.



Vetores no \mathbb{R}^3

O conjunto \mathbb{R}^3 torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3),$$

$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

Neste caso, o **vetor nulo** é $\vec{0} = (0, 0, 0)$ e o **simétrico** de \vec{v} é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, -v_3)$.

Se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$



Do mesmo modo,

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$



Exemplo

Dados $A = (0, 3, 1)$, $B = (2, 3 - 1)$ e $C = (0, 1, 0)$ determine $2\vec{AB} + \vec{AC}$.



Vetores no \mathbb{R}^n

De modo geral, denotamos por \mathbb{R}^n o conjunto formado pelas **n -uplas ordenadas** (x_1, x_2, \dots, x_n) tais $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

O conjunto \mathbb{R}^n torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n),$$

$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_n).$$

Neste caso, o **vetor nulo** é $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ e o **simétrico** de \vec{v} é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, \dots, -v_n)$.

Se $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n).$$



De forma análoga, também definimos a **norma (ou comprimento)** de um vetor do \mathbb{R}^n por

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}.$$

Um **vetor unitário** é um vetor que tem norma 1. Dado qualquer vetor não nulo \vec{v} , sempre podemos obter um **vetor unitário** \vec{u} com mesmo sentido de \vec{v} , basta fazer

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}.$$

Esse processo é chamada de **normalização** de \vec{v} . Alguns textos usam a notação \hat{v} e o chamam de **versor**.





Exemplo

Normalize o vetor $\vec{v} = (2, -1, 3)$.



Para Casa 2

Normalize os vetores $\vec{u} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$ e $\vec{v} = (4, -\sqrt{2}, 0, -5)$.



Um nutricionista forneceu uma tabela que especifica a **quantidade mínima de cada tipo de vitamina que deve ser ingerida diariamente**.

Tipo de vitamina	A	B	C	E
Quantidade mínima (mg)	3	1.1	60	11

Ele também forneceu uma tabela com a quantidade (em mg) de vitaminas em cada 100 gramas de 4 tipos de alimentos diferentes,

	Alimento			
Vitamina	1	2	3	4
A	0.140	0.580	0.150	0
B	0.08	0	1.30	0.08
C	0	0	26	38
E	1.60	0	6.90	0.2

Cada alimento é uma **variável**, ou seja,

x_i representa a quantidade (em “pacotes” de 100g) do alimento i que deve ser consumido diariamente, com $i = 1, \dots, 4$.



Com isso, se quisermos saber qual a quantidade de cada alimentos devemos consumir, para se ter a quantidade mínima de cada vitamina, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 0.14x_1 + 0.58x_2 + 0.15x_3 = 3, \\ 0.08x_1 + 1.3x_3 + 0.08x_4 = 1.1, \\ 26x_3 + 38x_4 = 60, \\ 1.6x_1 + 6.9x_3 + 0.2x_4 = 11, \end{cases}$$

Usando a notação vetorial, temos:

$$\begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0 \\ 1.60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.150 \\ 1.30 \\ 26 \\ 6.90 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \\ 38 \\ 0.2 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.1 \\ 60 \\ 11 \end{bmatrix}$$



Aprenderemos mais à frente que este sistema tem a seguinte solução

$$x_1 \approx 4.63, x_2 \approx 3.93, x_3 \approx 0.484 \text{ e } x_4 \approx 1.25.$$

Isto é, para se ingerir a quantidade mínima de cada tipo de vitamina devemos consumir:

463.0 gramas do alimento 1

393.0 gramas do alimento 2

48.4 gramas do alimento 3

125.0 gramas do alimento 4



Combinação Linear

Definição 1

Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é uma **combinação linear** de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tais que

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k.$$

No exemplo anterior, escrevemos o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.1 \\ 60 \\ 11 \end{bmatrix}$ como combinação

linear dos vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 1.3 \\ 26 \\ 6.9 \end{bmatrix}, \quad \text{e } \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \\ 38 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes**
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Matrizes

Uma **matriz** A , de tamanho $m \times n$, é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas, e será representada como:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dizemos que a_{ij} é o **elemento** ou a **entrada** de posição i, j da matriz A . Denotamos por $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ cujos elementos são números reais.

Quando $m = n$, dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem n** . Neste caso, os elementos da $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam **diagonal principal** de A .





Exemplo

São exemplos de matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$



Soma de Matrizes

A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$ $C = A + B$, obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B , ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para cada $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.



Exemplo

A soma das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$, $B = \alpha A$, obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α , isto é,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

para cada $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.





Exemplo

A multiplicação da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar $\alpha = -3$ é a matriz

$$B = -3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Com a soma e a multiplicação por escalar, o conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ forma um espaço vetorial!

Em particular, o conjunto das matrizes linha ou das matrizes coluna formam o espaço vetorial \mathbb{R}^n .

Alguns autores não usam a notação \vec{v} para representar um vetor. Escrevem simplesmente v e no contexto fica claro que se trata de um vetor de \mathbb{R}^n .

Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$, definimos o **produto de A por B** como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

para cada $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$





Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 2 \\ -6 & 15 & 4 \end{bmatrix}.$$



Transformações Lineares

Uma matriz A , de ordem $m \times n$, pode ser interpretada como uma **transformação** que leva vetores de \mathbb{R}^n em vetores \mathbb{R}^m .



Exercício

- 1 A matriz $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ rotaciona qualquer vetor do plano 90° no sentido anti-horário. Verifique esboçando no plano os vetores $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u = Rv$.
- 2 A matriz $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ reflete um vetor em relação à reta $y = x$. Verifique esboçando no plano os vetores u do item anterior e o vetor $w = Su$.



Neste sentido, o **produto de matrizes** desempenha o papel de composição de funções.



Exercício

Verifique isso calculando a matriz $M = SR$, onde R e S são as matrizes do exercício anterior e esboce os vetores u e Mu .





Para Casa 3

Considere as matrizes $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e os vetores $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

- 1 Esboce o triângulo ABC que tem como vértices as extremidades dos vetores.
- 2 Calcule $u' = Ru$, $v' = Rv$ e $w' = Rw$. Esboce o novo triângulo $A'B'C'$ com vértices dados pelos novos vetores.
- 3 Calcule $u'' = Su'$, $v'' = Sv'$ e $w'' = Sw'$. Esboce o triângulo $A''B''C''$ com vértices dados pelos novos vetores.
- 4 Calcule $M = SR$. Esboce o triângulo com vértices em Mu , Mv e Mw .





Para Casa 4

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA .



Propriedades das operações com Matrizes

Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

- 1 $A + B = B + A$ (comutatividade da soma)
- 2 $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade da soma)
- 3 $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (associatividade do produto por escalar)
- 4 $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributividade do produto por escalar)
- 5 $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributividade do produto por escalar)
- 6 $A(BC) = (AB)C$ (associatividade do produto)
- 7 $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$ (distributividade)





Exemplo

Se A e B são matrizes quadradas, então vale a identidade?

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$



Matriz Identidade

A matriz $n \times n$, definida por

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada **matriz identidade** é o **elemento neutro da multiplicação**, isto é,

$$AI_n = I_m A = A,$$

para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.



Matriz Transposta

A **transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, denotada por A^t , é a matriz obtida a partir de A trocando-se as linhas com as colunas, isto é,

$A^t = (b_{ij})_{n \times m}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para cada $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$.



Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$



Propriedades da Transposta

Sejam A e B matrizes com tamanhos apropriados e $\alpha, \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

- 1 $(A^t)^t = A$
- 2 $(A + B)^t = A^t + B^t$
- 3 $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
- 4 $(AB)^t = B^t A^t$





Para Casa 5

- 1 Sejam $A = [x \ 4 \ -2]$ e $B = [2 \ -3 \ 5]$. Encontre o valor de x tal que $AB^t = 0$, onde 0 é a matriz nula, isto é, com todas as entradas sendo zero.
- 2 Calcule M^3 , onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Operações com matrizes usando o sympy

```
import sympy as sp
```

```
A=sp.Matrix([[1, 2,-3],[3, 4,0]])  
B=sp.Matrix([[ -2,1,5],[0,3,-4]])  
C=sp.Matrix([[ -2,1,0],[0,3,0],[5,-4,0]])  
S=A+B  
display(S)  
P=A*C  
display(P)  
T=A.T  
display(T)
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 2 \\ -6 & 15 & 4 \end{bmatrix}, A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar**
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



O produto escalar

Definição 2

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ do \mathbb{R}^n , definimos o **produto escalar** (ou **produto interno**) entre eles por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$



Exemplo

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, em que $\vec{u} = (1, 2, -3)$ e $\vec{v} = (-3, 5, 2)$.



Propriedades do produto interno

Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} em \mathbb{R}^n e para qualquer número real λ , valem as propriedades:

- 1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- 2 $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$;
- 3 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;
- 4 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.



Exemplo

- 1 Calcule $\|u\|$

Mostre que

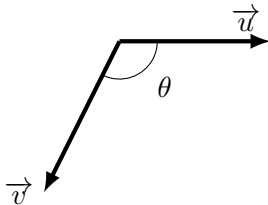
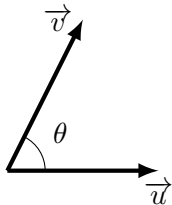
$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$



Ângulo entre vetores no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

Definição 3 (ângulo entre vetores)

Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} , no \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , definimos o **ângulo entre \vec{u} e \vec{v}** como sendo o menor ângulo formado por seus respectivos representantes com mesma origem.

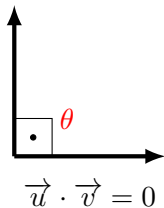
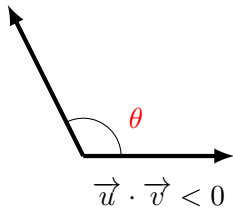
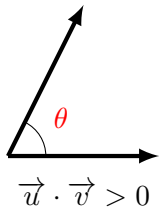


Proposição 4

Dados \vec{u} e \vec{v} , no \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta),$$

onde θ é o ângulo entre eles.

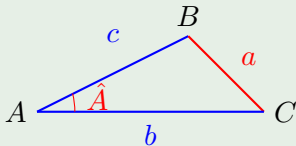


Lei dos Cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer com lados a , b e c , então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}),$$

onde \hat{A} é o ângulo oposto ao lado a .





Exemplo

Determine os ângulo entre os vetores

- 1 $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$.
- 2 $\vec{u} = (2, 0, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, -1)$.



Generalização de Ângulo entre vetores

Definição 5

Dados vetores \vec{u} e \vec{v} em \mathbb{R}^n , definimos o **ângulo entre \vec{u} e \vec{v}** como sendo o valor $0 \leq \theta \leq \pi$ que satisfaz:

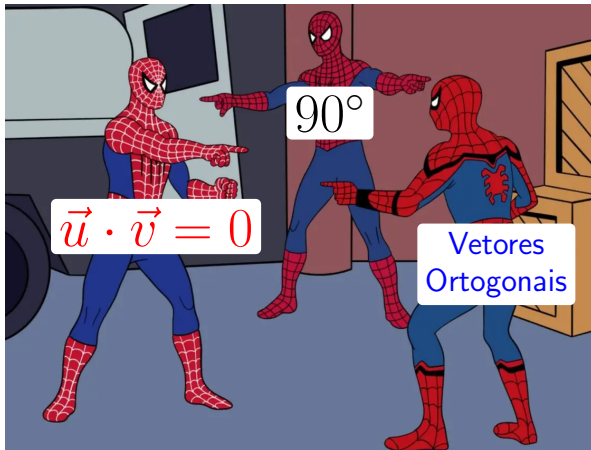
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$



Vetores Ortogonais

Dizemos que dois vetores são **ortogonais** quando o ângulo entre eles é de 90° , isto é, quando

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$





Para Casa 6

- 1 Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1)$.
- 2 Um retângulo tem vértices nos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 6, -2)$ e $C = (0, 5, -4)$. Determine o ponto D .



Produto escalar usando o sympy

```
import sympy as sp
import mpmath

u=sp.Matrix([1.12,-3.25,2.07,-1.83 ])
v=sp.Matrix([-2.29,1.72,4.33,-1.54])
uv=u.dot(v)
nu=u.norm()
nv=v.norm()
cos=uv/(nu*nv)
theta=sp.acos(cos)
thetag=round(mp.degrees(theta),2)
```

Denotando-se os vetores como matrizes colunas, temos:

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} 1.12 \\ -3.25 \\ 2.07 \\ -1.83 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2.29 \\ 1.72 \\ 4.33 \\ -1.54 \end{bmatrix} = 3.6265$$

$$\cos(\theta) \approx 0.151850373283378 \Rightarrow \theta \approx 1.41835623915784 \text{ rad} \approx 81.27^\circ.$$



Sumário

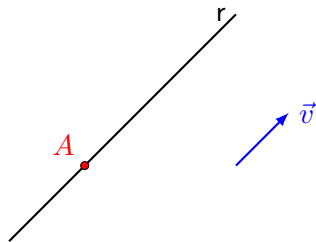
- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos**
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Equação Paramétrica de uma Reta

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor \vec{v} paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

$$P = A + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}.$$



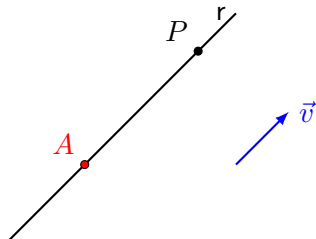
Esta equação é dita **equação vetorial paramétrica da reta r** , t é dito ser um **parâmetro** e \vec{v} é chamado de **vetor diretor**.



Equação Paramétrica de uma Reta

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor \vec{v} paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

$$P = A + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}.$$



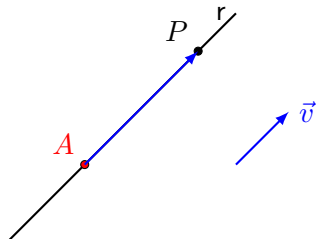
Esta equação é dita **equação vetorial paramétrica da reta r** , t é dito ser um **parâmetro** e \vec{v} é chamado de **vetor diretor**.



Equação Paramétrica de uma Reta

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor \vec{v} paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

$$P = A + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}.$$



Esta equação é dita **equação vetorial paramétrica da reta r** , t é dito ser um **parâmetro** e \vec{v} é chamado de **vetor diretor**.



Se $P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (a, b)$ em coordenadas temos que

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Analogamente, se $P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas equações são chamadas simplesmente de **equações paramétricas da reta** r .





Exemplo

- a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (0, 1)$.
- b) Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 2, -2)$ e $B = (-1, 4, 2)$.
- c) Sejam $A = (0, 1, 8)$, $B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A .





Para Casa 7

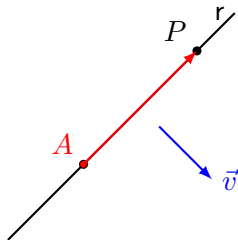
- 1 Considere os pontos $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, 1, -1)$. Determine a reta r que passa por A e B .
- 2 Sejam $A = (0, 1, 8)$, $B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C .

Note que a equação vetorial paramétrica da reta é válida para qualquer dimensão!



Equação Cartesiana da reta em \mathbb{R}^2

Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\vec{v} = (a, b)$ um vetor ortogonal a esta reta.



Dado um ponto qualquer $P = (x, y)$ desta reta r temos que

$$ax + by + c = 0.$$

Esta equação é dita **equação cartesiana da reta**.





Exemplo

Encontre a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $P = (1, 3)$ e $Q = (5, -9)$.

Equação reduzida da reta

A equação cartesiana de uma reta é chamada de **equação reduzida** quando está na seguinte forma:

$$y = mx + n.$$

O coeficiente m é dito **coeficiente angular** da reta e mede a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo OX . E o número n é dito **coeficiente linear** da reta e representa a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo OY .



Equação segmentária da reta

A equação cartesiana de uma reta é chamada de **equação segmentária** quando está na seguinte forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

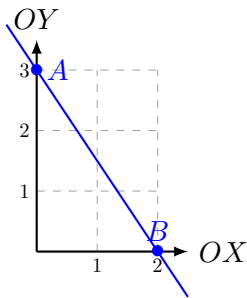
Neste caso, a reta intercepta os eixos OX e OY nas coordenadas p e q respectivamente.



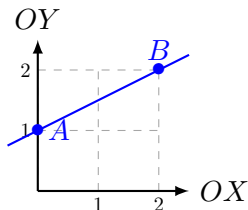


Exemplo

- 1 Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelos pontos $A = (0, 3)$ e $B = (2, 0)$.
- 2 Determine a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ and $B = (2, 2)$.



Exemplo 1



Exemplo 2





Para Casa 8

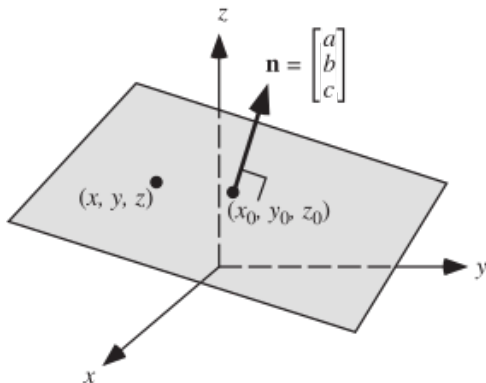
- 1 Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, -5)$ e tem coeficiente angular igual a 5.
- 2 Esboce no plano a reta cuja equação é dada por $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.



Equação Cartesiana do Plano no Espaço

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano em \mathbb{R}^3 , $\vec{n} = (a, b, c) \perp \pi$, então os pontos e $P = (x, y, z)$ do plano devem satisfazer a seguinte equação cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$





Exemplo

Determine a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta $r : X = (-1, 1, 2) + t(0, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.



Interseção de Planos

Qual o conjunto dos pontos do espaço que estão na interseção dos dois planos a seguir?

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Para descobrir isso, vemos multiplicar a 2ª equação por -2 e somar com a primeira.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

Note que geometricamente os dois sistemas tratam de interseção de planos diferentes, mas algebricamente os sistemas são **equivalentes**, isto é, têm o mesmo conjunto de pontos (x, y, z) como solução. Entretanto o segundo sistema é mais simples!



$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema tem soluções da forma:

$$y = -z \text{ e } x = 1 - z.$$

Fazendo $z = t$, vemos que os pontos da interseção são da forma

$$X = (1 - t, -t, t) = (1, 0, 0) + t(-1, -1, 1) \quad t \in \mathbb{R},$$

isto é, uma reta em \mathbb{R}^3 .

Isto nos motiva a estudar os chamados **sistemas lineares**.



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares**
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Sistemas de Equações Lineares

Usando o produto matricial, o **sistema linear** pode ser escrito da seguinte forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_B \cdot$$



Solução de um Sistema Linear

Uma **solução** de um sistema linear a n incógnitas é um vetor $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação matricial $AX = B$ associada ao sistema. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema.

Exemplo

O seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

tem como solução geral

$$X = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Como resolver Sistemas Lineares?

Uma forma de resolver um sistema linear é **substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro**, mas que seja mais fácil de resolver. Anteriormente, para resolver o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Fizemos uma operação elementares que o transformou no sistema mais simples de resolver

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0, \end{cases}$$

cujo conjunto solução é: $X = \{(1 - \alpha, -\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Esse procedimento pode ser generalizado.



Método de Eliminação

O método utilizado acima é conhecido como **método de eliminação**, pois ao aplicá-lo, estamos “eliminando incógnitas”.

Dizemos que dois sistemas são **equivalentes** quando possuem o mesmo conjunto solução. Obtemos sistemas equivalentes ao aplicarmos as chamadas **operações elementares**.

Operações Elementares

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.



Ilustrando com o exemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

\Updownarrow

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2 \times L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{array} \right]$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$



Neste caso, as operações elementares sobre o sistema se traduzem para as seguintes **operações elementares sobre matrizes**:

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

As três operações elementares sobre as linhas de uma matriz A são:

- Trocar a posição de duas linhas da matriz A ;
- Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

Definição 6

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é **linha-equivalente** a uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, quando B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre suas linhas.





Para Casa 9

Usando a técnica aprendida, resolva o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ 3x + y + 5z = 1 \end{cases}$$



Escalonamento

O **escalonamento** é uma técnica que nos permite resolver sistemas lineares de uma forma geral. Ele consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até obtermos uma matriz na forma conhecida como **matriz escalonada**. A saber, uma matriz está na forma **escalonada** quando satisfaz:

- 1 Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
- 2 O **pivô** (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha ocorre à direita do pivô da linha anterior.



As seguintes matrizes estão na forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$





Exemplo

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 4z = 20 \\ 2x + 3y + 5z = 25 \end{cases}$$



Exercício

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$$





Exercício

Reduza a seguinte matriz à forma escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$



Posto de uma matriz

Definição 7

Definimos o **posto** de uma matriz A , denotado por $\text{posto}(A)$, como sendo o número de linhas não nulas em sua forma escalonada.



Exemplo

Resolva o sistema e determine o posto da matriz aumentada.

$$\begin{cases} -9w + 3z = 6 \\ 40w + 5x + 15y - 10z = -45 \\ 5w + x + 3y - z = -7 \end{cases}$$



Variáveis Livres

Uma matriz escalonada para o sistema anterior é:

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

cuja solução geral é:

$$X = \{(-2w - 3y - 5, y, 3w + 2, w)\}$$

A matriz desse sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs são chamadas de **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. Assim, na solução geral, as variáveis associadas aos pivôs terão seus valores dependentes das variáveis livres.



Sistema impossível

Um sistema linear $AX = B$, onde $A = (a_{ij})_{m \times n}$, **não admite solução** quando

$$\text{posto}([A|B]) > \text{posto}(A).$$

Neste caso, dizemos que **o sistema é impossível**.

Nulidade

Por motivos que ficarão claros nas aulas posteriores, ao número de variáveis livres, daremos o nome de **nulidade**.

Teorema 8 (Teorema do Posto)

Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a matriz dos coeficiente de um sistema com n variáveis. **Se o sistema for possível**, então

$$\text{nulidade}(A) + \text{posto}(A) = n.$$



Classificação de sistemas lineares

Um sistema linear $AX = B$, onde $A = (a_{ij})_{m \times n}$, admite uma das seguintes alternativas:

Se $\text{posto}([A|B]) > \text{posto}(A)$, então **não possui solução**, isto é, sistema impossível.

Caso contrário,

- Se $\text{posto}(A) = n$, então possui **uma única** solução.
- Se $\text{posto}(A) < n$, então possui **infinitas** soluções.





Para Casa 10

Resolva os sistema: $AX = B$ e $AX = C$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Usando o sympy para resolver sistemas lineares

O `sympy` é uma poderosa ferramenta para resolver equações, especialmente as lineares. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1, \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right]$$



Usando o `linsolve` obtemos a solução geral do sistema:

```
import sympy as sp
```

```
x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
sol=sp.linsolve((A,B),x,y,z)
display(sol)
```

$$X = \left\{ \left(-\frac{3z}{7} - \frac{1}{7}, \frac{1}{7} - \frac{4z}{7}, z \right) \right\}$$



Usando o `solve` obtemos a solução geral do sistema:

```
import sympy as sp
```

```
x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
sistema=sp.Eq(A*X,B)
sol=sp.solve(sistema,(x,y,z))
display(sol)
```

$$X = \left\{ x : -\frac{3z}{7} - \frac{1}{7}, y : \frac{1}{7} - \frac{4z}{7} \right\}$$



Podemos também obter a **matriz escalonada** da seguinte forma

```
import sympy as sp  
  
x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)  
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])  
B=sp.Matrix([0,1,-1])  
Ma=sp.Matrix.hstack(A,B)  
Me=Ma.echelon_form()  
display(Me)
```

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Método de Gauss-Jordan

O método usado para resolver os sistemas anteriores, isto é, transformar a matriz aumentada em uma escalonada é conhecido como **Método de Gauss**.

Uma variação deste método, conhecido como **Método de Gauss-Jordan**, consiste em transformar a matriz aumentada na chamada **matriz escalonada reduzida**. A saber, uma matriz está na forma **escalonada reduzida** quando além de escalonada ela satisfaz:

- a O pivô de cada linha é 1;
- b Se uma coluna contém um pivô, então todos os outros elementos são iguais a zero.



A seguinte matriz está na forma escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Vimos anteriormente que o sistema

$$\begin{cases} -9w + 3z = 6 \\ 40w + 5x + 15y - 10z = -45 \\ 5w + x + 3y - z = -7, \end{cases}$$

tem matrizes aumentada e escalonada respectivamente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Se continuarmos o processo de escalonamento chegaremos à matriz escalonada reduzida

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$





Exemplo

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ -8x + 3y - 3z = -2, \end{cases}$$



Exemplo

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + z(a^2 - 14) = a + 2, \end{cases}$$



Para Casa 11

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \end{cases}$$



Para Casa 12

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + z(a^2 - 1) = a + 1, \end{cases}$$

Propriedades

- Todo sistema homogêneo **tem pelo menos uma solução**, a chamada **solução trivial**, isto é, $X = 0$.
- Todo sistema homogêneo com menos equações que incógnitas ($m < n$) **tem infinitas soluções**.
- Se X e Y são soluções de um sistema homogêneo, então $X + Y$ também o é.
- Se X é solução de um sistema homogêneo, então αX também o é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes**
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Matriz Inversa

Definição 9

Dizemos que uma matriz quadrada A , de ordem n , é **invertível** ou **não singular**, se existe uma matriz B , também de ordem n tal que

$$AB = BA = I_n,$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada **inversa de A** e é denotada por A^{-1} . Se A não tem inversa, dizemos que A **não é invertível** ou é **singular**.



Exemplo

A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Proposição 10

Para saber se A é invertível, basta verificar uma das identidades:

$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n.$$

Teorema 11

Uma matriz é invertível se, e somente se, é linha-equivalente à matriz identidade.



Exemplo

Verifique se a seguinte matriz é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Exercício

Verifique se a seguinte matriz é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$





Para Casa 13

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis e em caso positivo, calcule a inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$



Propriedades

- 1 A inversa, quando existe, é única.
- 2 Se A é invertível, então sua inversa também o é e vale $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 3 Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- 4 Se A é invertível, então A^t também o é e vale

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

- 5 Para saber se A é invertível, basta verificar uma das identidades:

$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n.$$

- 6 Um sistema $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso, a solução é $X = A^{-1}B$.



Invertendo matrizes com o sympy

```
import sympy as sp
```

```
A=sp.Matrix([[1, 2,3],[1,1,3],[0,1,2]])
```

```
B=sp.Matrix([[1,1,1,1],[1,2,-1,2],[1,-1,2,1],[1,3,3,2]])
```

```
invA=A.inv()
```

```
invB=B.inv()
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes**
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Determinantes

O **determinante** é uma função que a cada matriz quadrada A associa um número real, denotado por $\det(A)$. Vamos definir o determinante de forma induzida.

- **Matrizes 1×1 :**

$$\det(A) = \det([a_{11}]) = a_{11}.$$

- **Matrizes 2×2 :**

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



Exemplo

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 20 \end{bmatrix} = 40 - (-2) = 42$$

Se A for uma matriz quadrada de ordem n , denotaremos por A_{ij} a submatriz de A , de ordem $n - 1$, obtida mediante a omissão da i -ésima linha e da j -ésima coluna de A .

Definição 12

Dada uma matriz quadrada A . Definimos o **menor do elemento** a_{ij} como $\det(A_{ij})$. E o **cofator do elemento** a_{ij} como

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$



Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $A_{12} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. E o cofator do elemento a_{12} é $c_{12} = -\det(A_{12}) = -(-2 - (-2)) = 0$.



Determinantes ordem $n > 2$

Definição 13

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n > 2$. Definimos o **determinante** de A indutivamente por:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j}c_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j} \det(A_{1j}).$$

Essa soma é chamada de **expansão em cofatores** do determinante de A .



Exemplo

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 14

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . O determinante de A pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo qualquer linha ou qualquer coluna.



Exemplo

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$



Determinantes com o sympy

```
import sympy as sp
```

```
A=sp.Matrix([[1,0,3,1],[-1,3,2,5],[0,0,2,3],[2,1,-2,0]])  
A.det()
```

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 63$$



Um restaurante no fim do universo

Para se calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ pela expansão em cofatores, precisamos fazer n produtos e calcular n determinantes de matrizes $(n - 1) \times (n - 1)$, que por sua vez vai precisar calcular $n - 1$ produtos e assim por diante. Portanto, ao todo são necessários da ordem de $n!$ produtos.

Mesmo um supercomputador não pode calcular determinantes de matrizes moderadamente grandes usando cofatores!

Para se calcular o determinante de uma matriz 50×50 , é necessário se realizar $50! \approx 3 \times 10^{64}$ produtos. Um supercomputador pode realizar da ordem de 10^{17} (100 quadrilhões) operações por segundo. Portanto, precisaria de 3×10^{47} segundos para calcular esse determinante, isto é, aproximadamente 10^{39} anos!. A estimativa da idade do universo é de 10 bilhões de anos, isto é 10^{10} .



Propriedades dos determinantes

O determinante é um **função n -linear** das linhas ou das colunas. Vamos precisar o que isto quer dizer.

Podemos representar uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ em termos de suas linhas, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

em que A_i é a i -ésima linha, ou seja, $A_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$.

Suponha que uma linha A_k é decomposta como uma combinação linear de dois vetores linhas, isto é, $A_k = \alpha X + \beta Y$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ e $Y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]$.



Então,

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \alpha X + \beta Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Esta propriedade também vale para as colunas.





Exemplo

Calcule o determinante

$$\det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2 \cos(t) - 3 \operatorname{sen}(t) & 2 \sin(t) + 3 \cos(t) \end{bmatrix}$$



Cálculo de Determinantes por Redução por linhas

- Se uma matriz A possui duas linhas ou duas colunas iguais, então

$$\det(A) = 0.$$

- Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α , então

$$\det(B) = \alpha \det(A).$$

- O determinante é uma **função alternada**, isto é, Se B resulta de A pela troca da posição de duas linhas ou colunas, então

$$\det(B) = -\det(A).$$

- Se B é obtida de A substituindo-se uma linha pela soma dela com um múltiplo escalar de outra linha, então

$$\det(B) = \det(A).$$



- O determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é o produto dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$



Exemplo

Calcule o determinante da seguinte matriz transformando-a em uma matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: $\det(A) = 585$.

Propriedades dos Determinantes

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- $\det(A^t) = \det(A)$.
- A é invertível se, e somente se $\det(A) \neq 0$. Neste caso,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- O sistema homogêneo $AX = 0$ tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A) = 0$.





Exemplo

Seja

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema $TX = \lambda X$ tem solução não trivial.



Fórmula da Inversa para matrizes 2×2

Um matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e somente se, $\det(A) = ad - bc \neq 0$ e neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3**
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Definição 15

Sejam u e v vetores no espaço. O **produto vetorial** de u por v , designado por $u \times v$, é o único vetor do espaço que satisfaz as seguintes condições:

- 1 O **comprimento** é $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre u e v ;
- 2 A **direção** é ortogonal a u e v simultaneamente;
- 3 O **sentido** dado pela regra da mão direita.

Geometricamente, $\|u \times v\|$ representa a área do paralelogramo formado pelos representantes dos vetores u e v com mesma origem.



Proposição 16

Em um sistema de coordenadas, se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, então

$$u \times v = \left(\det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right)$$



Exemplo

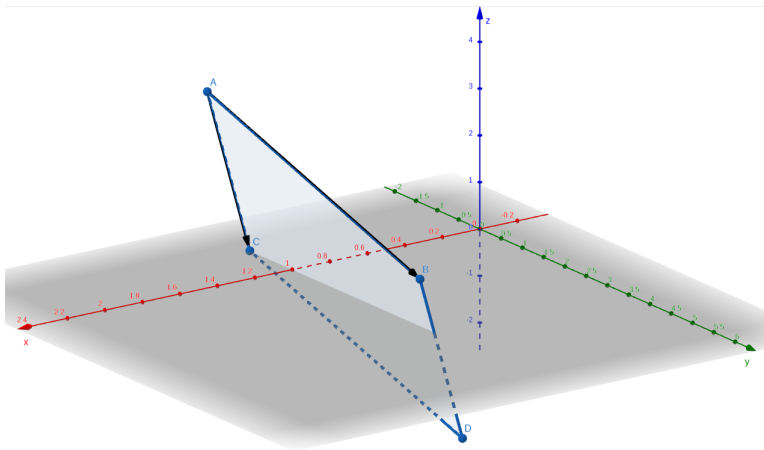
Sejam $u = (1, 2, 3)$ e $v = (2, -1, 1)$. Encontre $u \times v$.





Exemplo

Sejam $A = (1, -2, 3)$, $B = (1, 3, 1)$ e $C = (1, -1, 0)$. Calcule a área do paralelogramo que tem os segmentos AB e AC como arestas adjacentes.





Para Casa 14

Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, 2, 0)$, $B = (1, 0, 2)$ e $C = (0, 4, 3)$.



Propriedades do Produto Vetorial

- 1 $\|u \times v\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ou $v = 0$ ou u, v são múltiplos.
- 2 $u \times v = -v \times u$ (anticomutatividade).
- 3 $(\lambda u) \times v = u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v)$.
- 4 $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.



Exemplo

Mostre que se $u + v + w = 0$, então $u \times v = v \times w$.



Aplicação: Distância de Ponto à reta

Dados um ponto A e uma reta ℓ no espaço. Então, a **distância entre A e ℓ** é dada por

$$d(A, \ell) = \frac{\|AP \times v\|}{\|v\|},$$

onde P é um ponto e v um vetor diretor de ℓ .



Exemplo

Achar a distância entre $A = (3, 0, -2)$ e ℓ :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$




Para Casa 15

- 1 Obtenha a reta r dada pela inteseção dos planos $\pi_1 : x + y + z = 2$ e $\pi_2 : x - y - z = 0$.
- 2 Determine os pontos da reta r que estão à distância $\sqrt{6}$ da reta

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Definição 17

O **produto misto** entre os vetores u, v e w em \mathbb{R}^3 é o número real

$$[u, v, w] := (u \times v) \cdot w.$$

Geometricamente $|[u, v, w]|$ representa o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores u, v e w com mesma origem.



Proposição 18

Se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, então

$$[u, v, w] = \det \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



Exemplo

Determinar o volume do paralelepípedo que tem por arestas adjacentes os segmentos AB , AC e AD , onde $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 1, 1)$ e $D = (1, -1, -1)$.





Para Casa 16

Determinar x para que o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, x, 1)$ seja igual a 15.



Distância entre retas



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão**
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Combinação Linear

Definição 19

Um vetor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ é uma **combinação linear** de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tais que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{b}.$$



Exemplo

Podemos escrever $\vec{b} = (4, 2, 5)$ como combinação linear da seguinte forma:

$$\text{a } 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{b } 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$



Exemplo

De quantas maneiras podemos escrever o vetor $\vec{b} = 3$ como combinação linear dos vetores:

1 \vec{i} e \vec{k}

2 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e \vec{k}

3 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

4 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$



Teorema 20

Um vetor \vec{b} é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ se, e somente se, o sistema linear com matriz aumentada $[A|\vec{b}]$ é possível, onde as **colunas de A** são os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$



Exemplo

Escreva, se possível, os vetores $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos seguintes vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Para Casa 17

Escreva, se possível, os vetores $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ como

combinação linear dos seguintes vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Dependência e Independência Linear

No item 4 deste **Exemplo**, vimos que o vetor \vec{b} pode ser escrito como combinação apenas de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 dispensando a necessidade do vetor \vec{v}_3 . Isso ocorre pois o vetor \vec{v}_3 já é, por si só, uma combinação linear dos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Isso motiva a seguinte definição.

Definição 21

Dizemos que um conjunto $W = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de vetores do \mathbb{R}^n é **linearmente independente (LI)** se a equação vetorial

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

só possui a solução trivial. Em outras palavras, a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ é aquela em que todos os escalares são iguais a zero. Caso contrário, dizemos que o conjunto S é **linearmente dependente (LD)**.





Exemplo

Decida se os seguintes conjuntos de vetores são LI ou LD:

$$\textcircled{1} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\textcircled{2} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Mostrar que um conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de vetores do \mathbb{R}^n é **LI** é equivalente a mostrar que o sistema $AX = 0$ tem **solução única**, onde A é a matriz cujas **colunas são dadas pelos vetores de S** .





Exercício

Decida se são LI ou LD os seguintes vetores:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$



Solução do Exercício



Solução do Exercício

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 2L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 5L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & 24 \end{bmatrix} L_4 \rightarrow L_4 - 11L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -75 \end{bmatrix}$$

Logo, os vetores são LI.





Para Casa 18

Para cada caso, diga se o conjunto de vetores é LI ou LD.

$$1 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$$

$$2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$



Propriedades

- 1 Um conjunto formado por um único vetor não nulo é LI.
- 2 Um conjunto com 2 vetores não nulos é LD se, e somente se, são múltiplos.
- 3 Um conjunto finito de vetores de \mathbb{R}^n que contém o vetor nulo é LD.
- 4 Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ é LD, qualquer conjunto que o contenha também é LD.
- 5 As colunas de uma matriz A de ordem n são LI se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.
- 6 Em \mathbb{R}^n , um conjunto com mais de n vetores é LD.
- 7 Um conjunto de vetores é LD se, e somente se, **pelo menos um dos vetores** pode ser escrito como combinação linear dos demais.



Subespaço Vetorial

Definição 22

Um subconjunto **não-vazio** $V \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de **subespaço** de \mathbb{R}^n quando satisfaz:

- 1 Se $\vec{u}, \vec{v} \in V$, então $\vec{u} + \vec{v} \in V$,
- 2 Se $\vec{v} \in V$, então $\alpha\vec{v} \in V$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.



Exemplo

Decida se os conjuntos abaixo são subespaços.

- 1 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.
- 2 $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1\}$.
- 3 $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0 \text{ e } z = x^2\}$
- 4 $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$

Propriedades

- 1 Os subespaços vetoriais triviais de \mathbb{R}^n são $V = \{\vec{0}\}$ e o próprio $V = \mathbb{R}^n$.
- 2 O vetor nulo pertence a qualquer subespaço.
- 3 Se A é uma matriz $m \times n$, então o conjunto solução do sistema homogêneo $AX = \vec{0}$ é um subespaço de \mathbb{R}^n , chamado de **espaço solução** ou **espaço nulo** ou **núcleo de A** e será denotado por $\ker(A)$.
- 4 Retas, passando pela origem, são todos os subespaços não triviais de \mathbb{R}^2 .
- 5 Retas e planos em \mathbb{R}^3 , passando pela origem, são todos os subespaços não triviais de \mathbb{R}^3 .



Definição 23

Seja V um subespaço de \mathbb{R}^n . Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$, pertencentes a V , **geram** V , se qualquer vetor de V pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$. Neste caso, também dizemos que V é o **subespaço gerado por** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ e o denotaremos por $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$.



Exemplo

- 1 Determine um conjunto de geradores do núcleo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2 Mostre que $\vec{w} = (4, -1, 8)$ não está em $\text{span}\{(1, 2, -1), (6, 4, 2)\}$.



Definição 24

Seja V um subespaço de \mathbb{R}^n . Dizemos que um subconjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de V é uma **base** de V , se

- 1 \mathcal{B} é um conjunto de geradores de V .
- 2 \mathcal{B} é LI.



Exemplo

- 1 O conjunto $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ é uma base do \mathbb{R}^n , chamada de **base canônica**.
- 2 Determine uma base para o plano $x + 2y - z = 0$.



Teorema 25

Se $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ é uma base de $V \subset \mathbb{R}^n$, então qualquer outra base tem k elementos.

Definição 26

A **dimensão** de um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^n$ é definido como o número de elementos de uma base de V .





Exemplo

- 1 Determine uma base e a dimensão para o subespaços

$$V = \{(a + c, b + c, a + b + 2c); a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

- 2 Seja

$$W = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Obtenha uma base para W dentre seus geradores.



Dadas duas matrizes A e R linha-equivalentes, sabemos que:

① Os sistemas $AX = \vec{0}$ e $RX = \vec{0}$ têm exatamente as mesmas soluções!

② Uma solução $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ desses sistemas nos dá uma combinação

linear das colunas, isto é, se A_1, A_2, \dots, A_n e R_1, R_2, \dots, R_n são as respectivas colunas de A e R , então

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = \vec{0}$$

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_n R_n = \vec{0}$$

Em outras palavras, ao escalonarmos uma matriz, as colunas mudam mas a dependência linear permanece!





Para Casa 19

Encontre um subconjunto dos vetores

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \vec{v}_2 = (2, -5, -3, 6),$$

$$\vec{v}_3 = (0, 1, 3, 0), \vec{v}_4 = (2, -1, 4, -7), \vec{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$$

que forma uma base para o espaço gerado por eles. Escreva aqueles que não estão na base como uma combinação linear da base.



Espaço linha e Espaço coluna

Dada uma matriz A $m \times n$, além do núcleo de A , ainda existem mais dois subespaços associados à ela.

- 1 O espaço linha de A : subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelas linhas de A .
- 2 O espaço coluna de A : subespaço de \mathbb{R}^m gerados pelas colunas de A .

Teorema 27

Se uma matriz R está em forma escalonada por linhas, então os vetores linha não nulos formam uma base do espaço linha de R , e os vetores coluna que contém os pivôs formam uma base do espaço coluna.

Em particular, os espaços linha e coluna de R têm a mesma dimensão, apesar de serem subespaços de espaços vetoriais diferentes!



Note que a matriz a seguinte matriz está na forma escalonada

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então,

- Uma base para o espaço linha de R são os vetores:
 $\vec{r}_1 = (1, -2, 5, 0, 3)$, $\vec{r}_2 = (0, 1, 3, 0, 0)$, $\vec{r}_3 = (0, 0, 0, 2, 0)$
- Uma base para o espaço coluna de R são os vetores:

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Obtendo base para os espaço linha

As operações elementares com linhas não alteram o espaço linha de uma matriz, pois as novas linhas são combinações lineares das anteriores e as operações são reversíveis. Portanto, para obter uma base do espaço linha, basta escalonar a matriz.



Exemplo

Determine uma base para o espaço linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$



Obtendo base para os espaço coluna

Diferentemente do espaço linha, as operações elementares com linhas podem alterar o espaço coluna.



Exemplo

As seguintes matrizes são linha-equivalente, mas têm espaços coluna diferentes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Contudo, como vimos anteriormente, o escalonamento **mantém a dependência linear** das colunas. Portanto, para obtermos uma base do espaço coluna de uma matriz A , devemos:

- 1 Escalonar a matriz A ;
- 2 Selecionar os vetores colunas de A que correspondem aos pivôs da matriz escalonada.



Aplicações: obtendo bases de subespaços gerados



Exemplo

Considere o subespaço V de \mathbb{R}^5 gerado pelos vetores

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \vec{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6),$$

$$\vec{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0), \vec{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6).$$

- 1 Determine uma base qualquer de V .
- 2 Determine um subconjunto de $G = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ que forma uma base de V .
- 3 Escreva os vetores de G que não estão na base como combinação linear dos vetores da base.



Coordenadas em relação a uma base

Se $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é uma base de \mathbb{R}^n , então cada vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de forma única como

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n.$$

Neste caso, dizemos que esta é a **expressão de \vec{v} em termos da base \mathcal{B}** . Os escalares c_1, c_2, \dots, c_n são chamados de **coordenadas de \vec{v} em relação à base \mathcal{B}** e escrevemos

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2, \dots, c_n)_{\mathcal{B}} \text{ ou } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},$$

chamado **vetor de coordenadas em relação à base \mathcal{B}** .





Exemplo

- 1 Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = (2, -1, 3)$ em relação à base canônica do \mathbb{R}^3 , $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
- 2 Mostre que $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 . Em seguida, encontre o vetor de coordenadas de $\vec{v} = (5, -1, 9)$ em relação a essa base.



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores**
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas



Autovetores e Autovalores

Definição 28

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que um vetor **não nulo** $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é um **autovetor** de A se $A\vec{v}$ for um múltiplo escalar de \vec{v} , isto é, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Neste caso, dizemos que λ é um **autovalor** de A .



Exemplo

O vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$



Teorema 29

$\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de uma matriz A se, e só se,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esta equação é dita **equação característica de A** . E o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é denominado **polinômio característico**.



Exemplo

Determine os autovetores e autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$



Autoespaço

Os autovetores associados a um mesmo autovalor λ são os vetores não nulos que satisfazem

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0},$$

isto é, **são todos os vetores não nulos** pertencentes ao **núcleo de $A - \lambda I$** , chamado de **autoespaço de A associado a λ** e denotado por E_λ .



Exemplo

Determine uma base dos autoespaços da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$





Para Casa 20

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1 Determine os autovalores de A .
- 2 Determine os autoespaços de A .
- 3 Determine uma base para cada autoespaço e a dimensão.



Definição 30

Dizemos que uma **matriz quadrada** B é **semelhante** a um matriz A quando existir alguma matriz invertível P tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Neste caso, escrevemos $B \sim A$.

Matrizes semelhantes têm muitas propriedades em comum, por exemplo,

- 1 Matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.
- 2 Se A e B são semelhantes, então $B^k = P^{-1}A^kP$.





Exemplo

Defina P como a matriz cujas colunas são os autovetores da matriz

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ do exemplo anterior e calcule a matriz $D = P^{-1}AP$, semelhante a A .

Teorema 31

Sejam λ_1 e λ_2 **autovalores distintos** de uma matriz A . Se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são as bases dos autoespaços E_{λ_1} e E_{λ_2} , respectivamente, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é LI.



Diagonalização de Matrizes

Definição 32

Dizemos que uma matriz quadrada A é **diagonalizável** se for semelhante a alguma matriz diagonal, isto é, se existe alguma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Neste caso, dizemos que P **diagonaliza** A .

Teorema 33

Uma matriz A de ordem n é diagonalizável se, e só se, possui n autovetores linearmente independentes. Neste caso, se $D = P^{-1}AP$ a matriz diagonal D é formada pelos autovalores e a matriz P tem as colunas formadas pelos autovetores.





Exemplo

- 1 Mostre que a seguinte matriz não é diagonalizável

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 2 Calcule A^n onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
- 3 Mostre que a matriz A é diagonalizável e encontre as matrizes diagonal D e a matriz P que diagonaliza A .

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$





Para Casa 21

- 1 Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e obtenha as matrizes diagonal D e a matriz P que diagonaliza A .

- 2 Calcule B^{11} , onde

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$



Diagonizando com sympy

```
import sympy as sp
```

```
A=sp.Matrix([[ -1, 2, -2, 10],  
[0, -7, 6, -30],  
[0, 2, 0, 7],  
[0, 2, -2, 9]])  
[P,D]=A.diagonalize()  
display(P)  
display(D)
```

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & -7 & 6 & -30 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade**
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas





Exercício

Considere os vetores $\vec{v}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$ e $\vec{v}_3 = (2, -5, -1)$.

- 1 Mostre que os três vetores são ortogonais dois a dois.
- 2 Use esse fato para mostrar que os vetores são LI, isto é, a equação vetorial

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \vec{0},$$

só possui a solução trivial $x = y = z = 0$.

- 3 Escreva $\vec{v} = (3, -1, 1)$ como combinação linear da base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.



Definição 34

Um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é dito **ortogonal** se todos os vetores são ortogonais dois a dois, isto é,

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k, \quad i \neq j.$$

E dizemos que **ortonormal** se além de ortogonal cada vetor for unitário, isto é,

$$\|\vec{v}_i\| = 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Neste caso, escrevemos também

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k$$

onde δ_{ij} é o chamado **Delta de Kronecker**.



Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de \mathbb{R}^n é ortogonal, então esses vetores são LI. Além disso, se

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k, \quad (1)$$

então

$$c_i = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|^2}$$

Definição 35

Definimos a **projeção ortogonal** de um \vec{v} sobre um vetor **não nulo** \vec{w} como sendo o seguinte vetor

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \right) \vec{w}.$$

Com esta notação, temos que a identidade (1) se escreve como

$$\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{v} + \text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{v} + \dots + \text{proj}_{\vec{v}_k} \vec{v}.$$





Exemplo

Mostre $\vec{v}_1 = (0, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (3, 0, 3)$ e $\vec{v}_3 = (-4, 0, 4)$ formam uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 . Expresse $\vec{v} = (1, 2, 4)$ como uma combinação linear deles.



Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ uma base para um subespaço W de \mathbb{R}^n . Podemos obter uma base ortogonal para W através do seguinte processo, conhecido como **Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**.

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1,$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{v}_2,$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{w}_2} \vec{v}_3,$$

\vdots

$$\vec{w}_k = \vec{v}_k - \text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{v}_k - \text{proj}_{\vec{w}_2} \vec{v}_k - \dots - \text{proj}_{\vec{w}_{k-1}} \vec{v}_k$$



Exemplo

Determine uma base ortogonal para o subespaço de \mathbb{R}^5 gerado por

$$\vec{v}_1 = (-1, 0, -1, 0, 1), \quad \vec{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0), \quad \vec{v}_3 = (-1, 1, 0, 0, 0).$$



Para Casa 22

Determine uma base ortogonal para o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado por

$$\vec{v}_1 = (1, -1, -1, 1), \vec{v}_2 = (2, 1, 0, 1), \vec{v}_3 = (2, 2, 1, 2).$$



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas**
- 14 Cônicas



Matrizes Ortogonais

As colunas de uma matriz quadrada Q formam um conjunto **ortonormal** se, e somente se $Q^{-1} = Q^t$. A esse tipo de matriz, damos o nome de **matriz ortogonal**.



Exemplo

A seguinte matriz é ortogonal

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$



Matriz de Rotação

Uma classe especial de matrizes ortogonais são as chamadas **Matrizes de Rotação**. A seguinte matriz gira um **vetor do plano** por um ângulo θ no sentido anti-horário.

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

A seguinte matriz gira um **vetor do espaço** por um ângulo θ em torno do eixo z .

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Para Casa 23

- 1 Calcule as matrizes de rotação para $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.
- 2 Qual o ângulo da seguinte matriz de rotação

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$



Teorema Espectral para Matrizes Simétricas

Dizemos que uma matriz quadrada A é **ortogonalmente diagonalizável** se é diagonalizável e a matriz Q que a diagonaliza é ortogonal.

Teorema Espectral

Uma matriz A quadrada com entradas reais é ortogonalmente diagonalizável se, e somente se, A é simétrica. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.



Exemplo

Encontre uma diagonalização ortogonal para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$



Para Casa 24

Encontre a matriz Q que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Vetores
- 3 Matrizes
- 4 Produto Escalar
- 5 Retas e Planos
- 6 Sistema de Equações Lineares
- 7 Inversão de Matrizes
- 8 Determinantes
- 9 Produtos Vetoriais em \mathbb{R}^3
- 10 Subespaços, Base e Dimensão
- 11 Autovetores e Autovalores
- 12 Ortogonalidade
- 13 Diagonalização de Matrizes Simétricas
- 14 Cônicas**



Completamento de Quadrados

Produto Notáveis

$$(x + k)^2 = x^2 + 2k \cdot x + k^2$$

$$(x - k)^2 = x^2 - 2k \cdot x + k^2$$



Exemplo

Resolva as seguintes equações sem usar a fórmula de Bhaskara

① $x^2 - x = 0$

② $4x^2 - 1 = 0$

③ $x^2 - 2x = 8$

④ $x^2 - 8x = 9$





Exemplo

Complete os quadrados:

① $x^2 + 7x$

② $-2x^2 + 8x$

Fórmula de Bhaskara

Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Então as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$





Para Casa 25

Complete os quadrados:

① $x^2 - 4x$

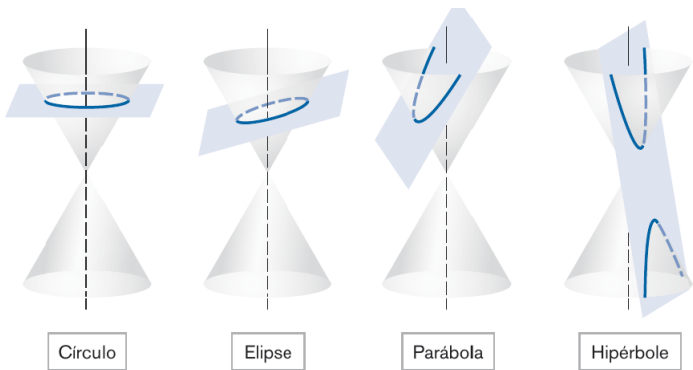
② $-x^2 + 2x$

③ $3x^2 - 9x$



Cônicas

Uma **cônica**, é uma curva obtida cortando-se um cone circular reto por um plano. As cônicas mais importantes são as **elipses**, as **hipérboles** e as **parábolas**, que ocorrem quando o plano cortante não passa pelo vértice do cone.



Em um plano cartesiano, uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

com a, b e c não todos nulos, representam uma cônica, onde também estão incluídos os casos das chamadas **cônicas degeneradas**, cujas possibilidades são: **um ponto**, **um par de retas**, **uma única reta** ou **o conjunto vazio**.



Exemplo

São exemplos de cônicas que já conhecemos:

- 1 $x^2 + 2x - y = 0$ é uma parábola.
- 2 $x^2 + y^2 = 1$ é um círculo.
- 3 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ é o conjunto vazio.

Qual cônica é essa

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0?$$



Cônicas na forma reduzida

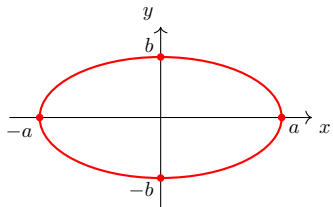
Para cada cônica, podemos escolher um sistema de eixos cartesianos de modo que a equação que a represente assuma a forma mais simples possível, chamada de **equação reduzida (ou canônica)**.

- Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- Hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$;
- Parábola: $y = ax^2$ ou $x = ay^2$.

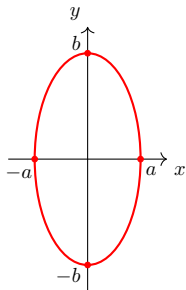


Elipse

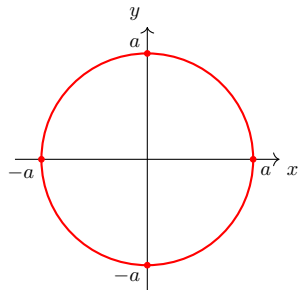
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$a > b$$



$$b > a$$

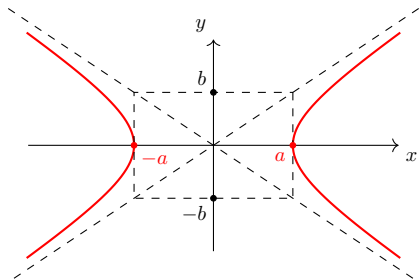


$$a = b$$

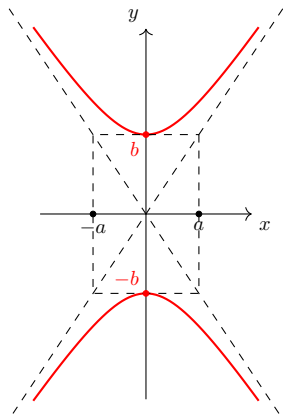


Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

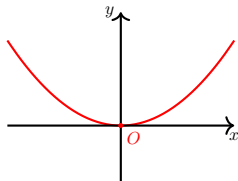


$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

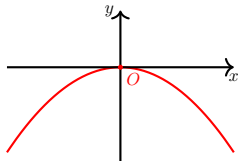


Parábola

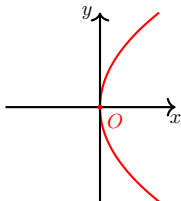
$$y = ax^2, a > 0$$



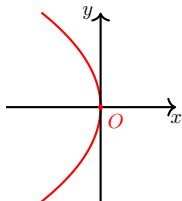
$$y = -ax^2, a > 0$$



$$x = ay^2, a > 0$$



$$x = -ay^2, a > 0$$





Exemplo

Identifique as cônicas abaixo e faça um esboço.

① $4x^2 + 9y^2 = 36$

② $5x^2 - 2y^2 = 15$

③ $4x^2 - 9y = 0$

④ $y^2 = 5x$



Curvas que não são parábolas

① $y = x^4$

② $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (catenária)

Quando um cabo flexível pesado é suspenso entre dois pontos na mesma altura, vemos a formação de uma curva conhecida como **catenária**, do latim *catena* que significa corrente.



Kette Kettenkurve Catenary, Kamel15



Por que o gráfico de uma função do 2º é uma parábola?

Função do 2º grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

$$y = ax^2 + bx + c$$



Exemplo

Faço o completamento de quadrado e esboço o gráfico de

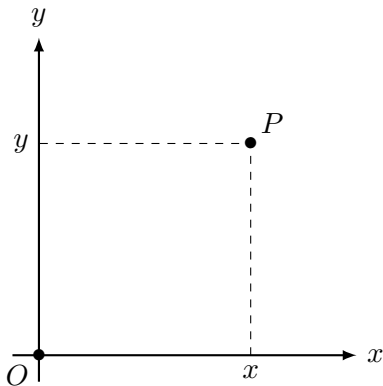
$$y = 2x^2 - 12x + 17.$$



Cônicas Transladadas

Mudança de coordenadas

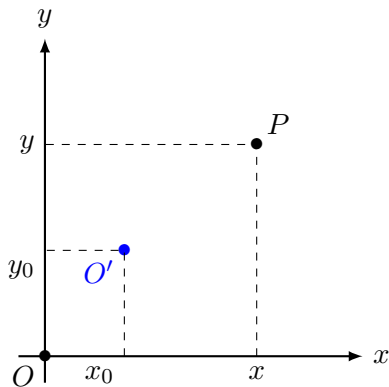
$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases}$$



Cônicas Transladadas

Mudança de coordenadas

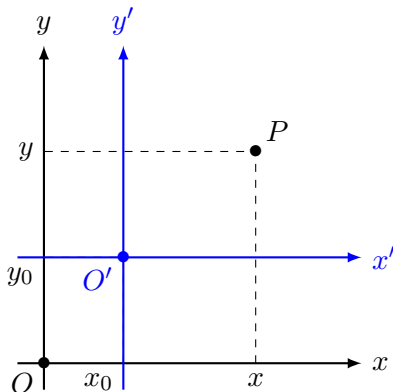
$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases}$$



Cônicas Transladadas

Mudança de coordenadas

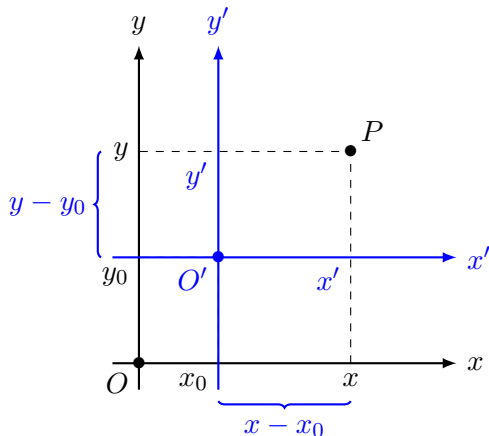
$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases}$$



Cônicas Transladadas

Mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$



As equações de cônicas que não apresentam termos mistos da forma xy podem ser colocadas na forma reduzida através de uma translação de eixos.



Exemplo

Identifique e faça o esboço das cônicas a seguir:

- 1 $x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 9 = 0.$
- 2 $4x^2 - 16y^2 - 24x - 24y + 33 = 0.$



Cônicas Rotacionadas

Os termos mistos da forma xy de uma equação de cônica podem ser eliminados através de um processo de diagonalização, que equivale a uma rotação dos eixos.

Uma expressão da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

é chamada de **forma quadrática** em x e y e pode ser representada usando matrizes da seguinte forma:

$$ax^2 + by^2 + cxy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^t AX.$$



Teorema dos Eixos Principais

Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, existe uma matriz ortogonal que diagonaliza A , isto é,

$$Q^t A Q = D,$$

onde D é uma matriz diagonal formada por autovalores de A . Fazendo a mudança de variáveis

$$X = Q \bar{X} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \bar{X} = Q^t X,$$

temos

$$X^t A X = (Q \bar{X})^t A (Q \bar{X}) = \bar{X}^t (Q^t A Q) \bar{X} = \bar{X}^t D \bar{X}$$



Teorema dos Eixos Principais

Assim, se λ_1, λ_2 são os autovalores de A e

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cxy &= X^t A X \\ &= \bar{X}^t D \bar{X} \\ &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2, \end{aligned}$$

uma forma quadrática sem termos mistos.





Exemplo

Identifique e faça um esboço das seguintes cônicas:

- 1 $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6.$
- 2 $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0.$
- 3 $x^2 + 4\sqrt{2}xy - y^2 + 2\sqrt{6}x + 2\sqrt{3}y = 0$





Para Casa 26

Identifique e faça um esboço das seguintes cônicas

① $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

② $11x^2 + 24xy + 4x + 4y^2 + 3y + \frac{15}{4} = 0$



