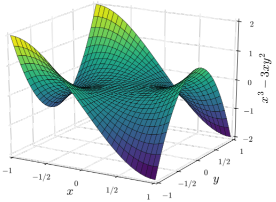
Cálculo III
Cálculo Diferencial de Várias Variáveis



Prof. Reginaldo Demarque

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN

29 de setembro de 2023

Sumário

Sumário

A Disciplina

Bibliografia

- J. Stewart
  Cálculo Volume 2
  Editora Cengage Learning, 6ª ed., São Paulo, 2011.
- G. B. Thomas
  Cálculo Volume 2
  Editora Pearson, 12ª ed., São Paulo, 2012.

Bibliografia

Diomara Pinto. Maria Cândida Ferreira Morgado
Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis
Editora UFRJ, 3ª ed., 2005.

Sumário

Introdução

Otimização de uma variável

Imagine que você foi contratado por uma empresa que fabrica caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de uma folha retangular de papelão medindo 30cm x 50cm. Para se construir uma caixa, um quadrado de lado medindo x cm é retirado de cada canto da folha de papelão. O problema é determinar o valor de x a fim de que a caixa correspondente tenha maior volume possível.

Problema de Maximização

Função-objetivo:

$$V(x) = (30 - 2x)(50 - 2x)x$$

sujeito à restrição: $0 \leq x \leq 15$.

Otimização de várias variáveis

Agora imagine que você foi contratado por uma empresa que fornece refeições a seus funcionários.

A fim de estabelecer um cardápio que atenda a quantidade diária mínima de vitaminas que um funcionário deve consumir e minimize o custo de compras dos diversos tipos de alimentos.

Um nutricionista forneceu uma tabela que especifica a quantidade mínima de cada tipo de vitamina que deve ser ingerida diariamente por cada funcionário:

Tipo de vitamina	A	B	C	E
Quantidade mínima (mg)	3	1.1	60	11

Ele também forneceu uma tabela com a quantidade (em mg) de vitaminas em cada 100 gramas de 9 tipos de alimentos diferentes,

Alimento	A	B	C	E
1	0.140	0.08	0	1.60
2	0.580	0	0	0
3	0.150	1.30	26	6.90
4	0	0.08	38	0.2
5	26.780	0.07	13	0.07
6	0.035	0.05	1	0
7	0	0.04	5	0.02
8	0	0.08	8	0.10
9	0	0.07	25	2

E de uma tabela com o preço de 100 gramas de cada tipo de alimento:

Alimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preço	0.60	1.00	5.00	1.00	0.50	0.20	0.15	0.40	1.00

Cada alimento é uma variável de controle, ou seja,

x_i representa a quantidade (em "pacotes" de 100g) do alimento i que a empresa deve comprar diariamente para cada funcionário, com $i = 1, \ldots, 9$.

A função-objetivo que fornece o custo (que queremos minimizar) associado à compra dos diversos tipos de alimentos para cada funcionário é dada por

$$C(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = 0.6x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 1x_4 + 0.5x_5 + 0.2x_6 + 0.15x_7 + 0.4x_8 + 1x_9.$$

Consultando as outras tabelas, podemos ver que o problema está sujeito às restrições impostas pelas quantidades mínimas de cada vitamina, a saber

$$
\begin{aligned}
&0.14x_1 + 0.58x_2 + 0.15x_3 + 26.79x_5 + 0.035x_6 \geq 3,\\
&0.08x_1 + 1.3x_3 + 0.08x_4 + 0.07x_5 + 0.05x_6 + 0.04x_7 + 0.08x_8 + 0.07x_9 \geq 1.1,\\
&26x_3 + 38x_4 + 13x_5 + x_6 + 5x_7 + 8x_8 + 25x_9 \geq 60,\\
&1.6x_1 + 6.9x_3 + 0.2x_4 + 0.07x_5 + 0.02x_7 + 0.1x_8 + 2x_9 \geq 11,\\
&x_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, 9.
\end{aligned}
$$

Usando as técnicas que serão vistas neste curso de cálculo 3 é possível resolver este problema e obter a seguinte solução:

$$x_1 = 6.24,\ x_3 = 0.112,\ x_5 = 0.078,\ x_7 = 11.209$$

$$x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = x_9 = 0$$

Para Casa 1

Revise as seções 12.5 e 12.6 do [Stewart, 6ª ed., 2011] e faça seguintes os exercícios

1. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1, 3, 2)$ e $B = (-4, 3, 0)$
2. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $A = (6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n} = (-2, 1, 5)$
3. Identifique e esboce as superfícies:
   a. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
   b. $z^2 = y^2 + 4x^2$
   c. $z = x^2 + y^2$

Sumário

Definição 1

Uma função vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$, denotada por:

$$\begin{array}{rccl} \vec{r}: & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \vec{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)). \end{array}$$

As funções $f_1, \ldots, f_n$ são chamada funções componentes.

Example 3.1

1. $\vec{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
2. $\vec{r}(t) = (t, 1, 0)$, $t \geq 0$.

Definição 2

Sejam $\vec{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ uma função vetorial com domínio D. Definimos o limite de $\vec{r}(t)$ quanto t tende a $a \in D$ por

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \ldots, \lim_{t\to a} f_n(t)\right),$$

desde que o limite das funções componentes existam.

Exercício

Determine $\lim_{t\to 0} \vec{r}(t)$, onde $\vec{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t})$.

Definição 3

Uma função vetorial $\vec{r}$ é contínua em a se $\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$.

Em vista desta definição, uma função $\vec{r}$ é contínua em a se, e somente se, cada uma de suas componentes é contínua em a.

Curvas Parametrizadas no plano

Quando uma função vetorial $\vec{r}(t) = (f(t), g(t))$, está definida em um intervalo I da reta e é contínua, então o conjunto C de todos os pontos (x, y) do plano tais que

$$x = f(t) \quad \text{e } y = g(t) \tag{1}$$

quando t varia formam uma curva no plano. As equações em (1) são ditas equações paramétricas de C, $\vec{r}$ é dita ser uma parametrização de C e t é chamado de Parâmetro.

Exemplo

Determine as curvas parametrizadas por:

1. $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. $\vec{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Veja como plotar curvas parametrizadas usando python Link

Parametrização de Função

O gráfico de qualquer função $y = f(x)$ pode ser parametrizado de forma natural usando a variável x como parâmetro, da seguinte forma:

$$\vec{r}(t) = (t, f(t)),\ \ t \in I.$$

Exercício

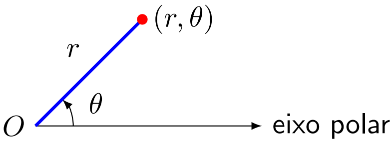
Determine uma parametrização para a parábola $y = x^2$.

Para Casa 2

1. Determine uma parametrização para o segmento de reta que entre os pontos $(1, 0)$ e $(2, 5)$.
2. Determine a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (2\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

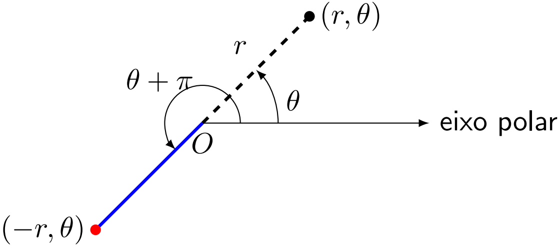
Coordenadas Polares

Um sistema de coordenadas polares é estabelecido ao escolhermos um ponto no plano, conhecido como polo (ou origem), denotado por O, e uma semi-reta começando em O, chamada eixo polar. Qualquer ponto P do plano é associado a um par ordenado (r, θ), chamado coordenadas polares de P, sendo r a distância de P a O e θ o ângulo entre o eixo polar e a reta OP.



Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e convencionamos que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ.

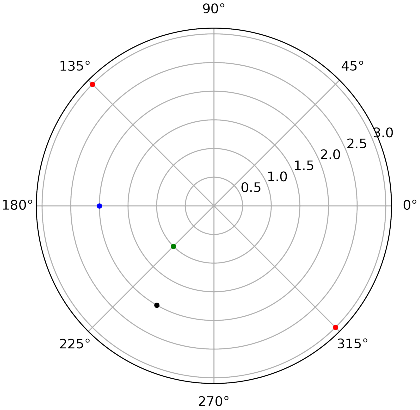
No caso $r < 0$, convencionamos que a coordenada (r, θ) corresponde ao simétrico, em relação à origem, do ponto $(|r|, \theta)$.



Exemplo

Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas

a. $(1, 5\pi/4)$
b. $(2, 3\pi)$
c. $(2, -2\pi/3)$
d. $(-3, 3\pi/4)$



```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.axes(projection = 'polar')

plt.polar(5*np.pi/4,1, 'g.')
plt.polar(3*np.pi,2, 'b.')
plt.polar(-2*np.pi/3,2, 'k.')
plt.polar(3*np.pi/4,3, 'r.')
plt.polar(3*np.pi/4+np.pi,3, 'r.')

plt.show()
```

Relação entre coordenadas cartesianas e polares

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

O gráfico de uma equação polar consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação (r, θ) cujas coordenadas satisfaçam a equação.

Exemplo

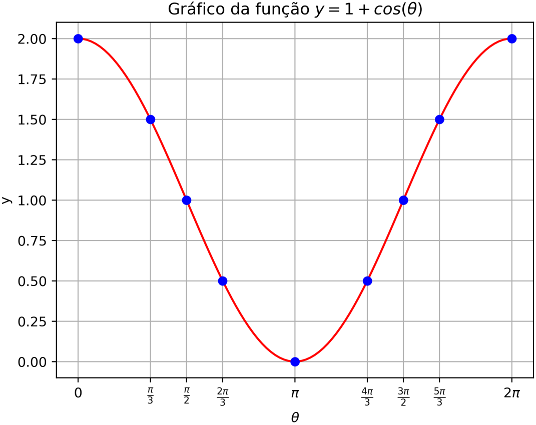
Esboce a curva que é representada pelas equações polares abaixo.

a. $r = 2$
b. $\theta = 1$

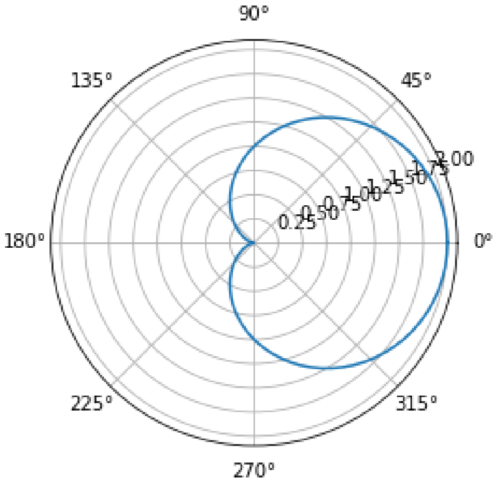
Exemplo

Esboce a curva que é representada pela seguinte equação polar

$$r = 1 + \cos\theta \text{ (cardioide)}$$



```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

theta= np.linspace(0, 2*np.pi, 60)
r=1+np.cos(theta)

theta=np.where(r >= 0, theta,theta + np.pi)

plt.polar(theta, np.abs(r))
plt.show()
```



$$r = 1 + \cos\theta$$

Usando coordenadas Polares para Parametrizar

Se em uma equação polar conseguirmos escreve a coordenada r em função de θ, isto é, $r = f(\theta)$, então podemos usar θ como parâmetro e parametrizar a curva representada pela equação polar da seguinte forma:

$$\vec{\alpha}(\theta) = f(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$$

Exemplo

Uma parametrização da cardioide $r = 1 + \cos\theta$

$$\vec{\alpha}(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (1 + \cos(\theta))(\cos\theta, \sin\theta), \ \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Para Casa 3

Esboce a curva que é representada pelas equações polares abaixo.

1. $r = 2\cos\theta$
2. $r = \cos 2\theta$ (rosácea de quatro pétalas)

Quando uma função vetorial $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, está definida em um intervalo I da reta e é contínua, então o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) do plano tais que

$$x = f(t), \ y = g(t) \ \text{ e } z = h(t) \tag{2}$$

quando t varia formam uma curva no espaço. As equações em (2) são ditas equações paramétricas de C, $\vec{r}$ é dita ser uma parametrização de C e t é chamado de Parâmetro.

Exemplo

Determine as curvas parametrizadas por:

1. $\vec{r}(t) = (1, t, 2t)$, $t \in (0, 1)$.
2. $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

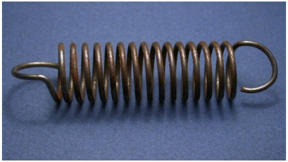
Veja como plotar curvas parametrizadas usando python Link

Hélices

A curva do exemplo anterior é uma hélice. Existem vários tipos de hélices, as mais simples são as hélices circulares com passo constante, cuja parametrização e dada por

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt),$$

onde a, b são constantes.
As hélices aparecem em diversas aplicações, como por exemplo no formato de molas e no modelo de DNA que é formado por uma dupla hélice.



Para Casa 4

1. Determine uma parametrização para o círculo de centro em $(1, 2)$ e raio 3.
2. Determine uma parametrização para o segmento de reta ligando o ponto $P = (1, 3, -2)$ ao ponto $Q = (2, -1, 3)$.
3. Calcule $\|\vec{r}(t)\|$, onde $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
4. Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.
5. Mostre que a curva $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ está contida no cone $z^2 = x^2 + y^2$ e use esse fato para esboçar a curva.

Derivadas

Definição 4

A derivada de uma função vetorial $\vec{r}$ é definida por:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - r(t)}{h},$$

se esse limite existir.

Interpretação Geométrica

O vetor $\vec{r}\,'(t)$ é um vetor tangente à curva parametrizada por $\vec{r}$ no ponto $P = \vec{r}(t)$.

Proposição 5

Se $\vec{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, onde f_i, com $i = 1, \dots, n$, são funções deriváveis, então

$$\vec{r}\,'(t) = \left(f_1'(t), \dots, f_n'(t)\right)$$

Exemplo

Encontre o vetor tangente unitário no ponto $t = 0$ da curva

$$\vec{r}(t) = \left(1 + t^3, te^{-t}, \sin(2t)\right).$$

Regras de Derivação

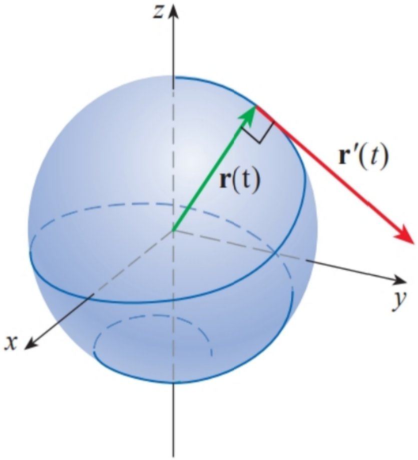
Proposição 6

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ funções vetoriais diferenciáveis, c uma constante e f uma função real. Então,

1. $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t)+\vec{v}(t)\right)=\vec{u}\,'(t)+\vec{v}\,'(t)$
2. $\frac{d}{dt}\left(c\vec{u}(t)\right)=c\vec{u}\,'(t)$
3. $\frac{d}{dt}\left(f(t)\vec{u}(t)\right)=f'(t)\vec{u}(t)+f(t)\vec{u}\,'(t)$
4. $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right)=\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}\,'(t)$
5. $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)\right)=\vec{u}\,'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}\,'(t)$
6. $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(f(t))\right)=f'(t)\vec{u}\,'(f(t))$ (regra da cadeia)

Exemplo

Mostre que se $\|\vec{r}(t)\| = c$ para todo $t \in I$, então $\vec{r}\,'(t)$ é ortogonal a $\vec{r}(t)$ para todo $t \in I$.



Comprimento de Arco

Se $\vec{r} = \vec{r}(t)$, com $a \leq t \leq b$, é curva parametrizada e $\vec{r}\,'$ é contínua, pode-se mostrar que o comprimento de arco é dado por:

$$L = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt$$

Exemplo

Um planador está voando para cima ao longo da hélice $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Qual a distância percorrida ao longo de sua trajetória entre os pontos $(1,0,0)$ e $(1,0,2\pi)$.

Uma mesma curva C pode ser representada por mais de uma parametrização. Por exemplo,

$$\vec{\alpha}(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

e

$$\vec{\beta}(t) = (\cos(2t), \sin(2t)),\ 0 \leq t \leq \pi$$

ambas representam o círculo unitário com centro na origem.

Exercício

Calcule o comprimento de arco de $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ e $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t)$.

Função Comprimento de Arco

Seja C uma curva parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, onde $\vec{r}\,'$ é contínua. Definimos a sua função comprimento de arco por

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}\,'(u)\| du.$$

Note que

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}\,'(t)\| \geq 0,$$

assim $s = s(t)$ é uma função crescente e de classe C^1. Neste caso, s possui uma inversa, denotada por $t = t(s)$.

Parametrização pelo Comprimento de Arco

Isso nos permite reparametrizar a curva C em relação ao comprimento de arco fazendo

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s)),\ 0 \leq s \leq L,$$

onde L é o comprimento final da curva.

É frequentemente útil usar a parametrização em relação ao comprimento de arco, pois este não depende do sistema de coordenadas nem da parametrização.

Exemplo

Reparametrize a hélice circular $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ utilizando o comprimento de arco a partir do ponto $(1, 0, 0)$.

Quando a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, geometricamente isso significa que o ponto $\vec{r}(s)$ é o ponto da curva que está a s unidades de comprimento do início da curva.

Para Casa 5

Seja $\vec{r}(t) = (e^t \sin(t), e^t \cos(t), \sqrt{2}e^t)$ e $P = (0, 1, \sqrt{2})$.

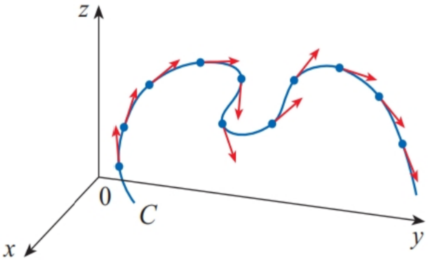
1. Encontre a função comprimento de arco da curva medida a partir do ponto P na direção crescente de t.
2. Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco começando de P.
3. Encontre o ponto a 4 unidades de P ao longo da curva na direção crescente de t.

Uma parametrização $\vec{r} = \vec{r}(t)$ é chamada suave em um intervalo I se $\vec{r}\,'$ for contínua e $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ em I.

Se C é uma curva parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ suave, então o vetor tangente unitário é definido por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}.$$

O vetor tangente unitário indica a direção da curva e muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda mais rapidamente quando se dobra mais acentuadamente.



Curvatura

A curvatura de C em dado ponto é definida como

a taxa de variação da direção do vetor tangente unitário por unidade de comprimento,

em outras palavras,

a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto.

Por isso, definimos a curvatura como a norma da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento de arco, a saber,

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|,$$

onde $\vec{T}$ é o vetor tangente unitário.

Entretanto, na maioria das vezes a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso, podemos usar a Regra da Cadeia para obter uma fórmula em termos de um parâmetro qualquer. Se $s = s(t)$ é a função comprimento de arco, então:

$$\frac{d\vec{T}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{T}(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\|\vec{r}\,'(t)\|.$$

Logo,

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}\,'(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}.$$

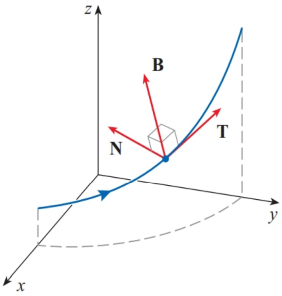
Exemplo

Calcule a curvatura de um círculo de raio ρ.

Vetor Normal Principal e Binormal

Como $\vec{T}$ é unitário, sabemos que $\vec{T}$ é ortogonal à $\vec{T}\,'$, portanto definimos o vetor normal unitário principal ou simplesmente vetor normal unitário como

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{\|\vec{T}\,'(t)\|}.$$



Veremos que este vetor indica a direção que na qual a curva está virando em cada ponto. A partir dele, definimo o vetor binormal unitário

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t).$$

Estes três vetores formam uma base ortonormal muito importante em geometria diferencial e no estudo de movimento de corpos, chamada de Triedro de Frenet.

Exemplo

Determine os vetores normal e binormal da hélice circular

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t).$$

Suponha que uma partícula se mova de forma que seu vetor posição no instante t seja $\vec{r}(t)$. Então vamos denotar por:

- $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ é o vetor velocidade da partícula no instante t.
- $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ é a velocidade escalar da partícula no instante t.
- $\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t)$ é o vetor aceleração da partícula no instante t.
- $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$ a aceleração escalar da partícula no instante t.

Podemos mostrar que a aceleração é dada por:

$$\vec{a} = v'\vec{T} + v^2\kappa\vec{N}.$$

Com isso temos as seguintes conclusões:

- O vetor $\vec{B}$ não aparece, ou seja, a aceleração sempre está no plano determinado por $\vec{T}$ e $\vec{N}$, chamado plano osculador.
- A componente tangencial da aceleração mede a taxa de variação do módulo da velocidade, isto é, a mudança na velocidade escalar.
- A componente normal é dada pelo quadrado da velocidade escalar e pela curvatura.

Exemplo

Um objeto de massa m que se move em uma trajetória circular com velocidade angular constante ω tem vetor posição dado por $\vec{r}(t) = (\rho\cos(\omega t), \rho\sin(\omega t))$. Determine a força que age sobre o objeto.

Usando a última equação, podemos deduzir a seguinte fórmula para a curvatura.

Teorema 7

A curvatura de uma curva parametrizada suave $\vec{r} = \vec{r}(t)$ é dada por:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}{v^3(t)} = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}.$$

Exemplo

Determine a curvatura da cúbica retorcida $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$.

Para Casa 6

1. Mostre que a curvatura de uma curva plana que tem equação cartesiana da forma $y = f(x)$ é dada por:

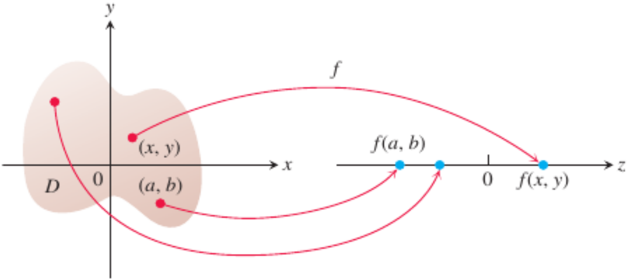
$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}.$$

2. Calcule a curvatura da parábola $y = x^2$ e determine o ponto onde a curvatura é máxima.
3. Determine as componentes normal e tangencial da aceleração da partícula que se move segundo a trajetória $\vec{r}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + e^{t}\,\vec{j}$.
4. Uma partícula se move sobre a parábola $y = x^2$ da esquerda para a direita. Quando ela passa pelo ponto $(2, 4)$, sua velocidade é $v = 3$ m/s e $v' = 7$ m/s^2. Ache o vetor velocidade e o vetor aceleração neste ponto.

Sumário

Uma função real f de n variáveis é uma relação que associa a cada n-upla $(x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ um único número real $z = f(x_1, \dots, x_n)$. O subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é chamado domínio da função f. Podemos denotar a função f por

$$\begin{array}{rccl} f: & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & z = f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$



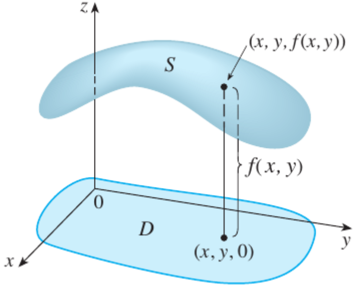
Exemplo

1. A função $V(r,h) = \pi r^2 h$, $r,h > 0$ é uma função de duas variáveis que fornece o volume de um cilindro circular reto de raio da base r e altura h.
2. A função $z = f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ é uma função de duas variáveis cujo domínio são todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \neq y$.
3. A função $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ é uma função de três variáveis cujo domínio são todos os pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x^2+y^2+z^2 \neq 0$, ou seja, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Gráfico de uma função de duas variáveis

O gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, denotado por G_f, é o subconjunto do $\mathbb{R}^3$ formado por todos os pontos da forma $(x, y, f(x, y))$, isto é,

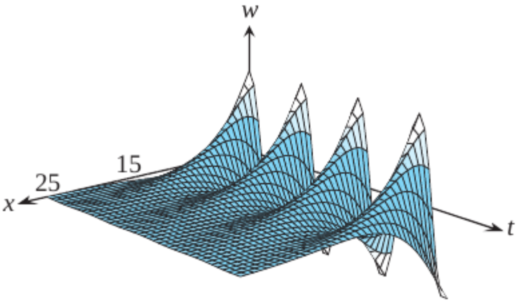
$$G_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$



Temperatura abaixo da superfície da Terra

A temperatura w abaixo da superfície da Terra é uma função da profundidade x abaixo da superfície e da época do ano t. Se medirmos x em pés e t como o número de dias decorridos a partir da data esperada da maior temperatura anual da superfície, podemos modelar a variação da temperatura com a função

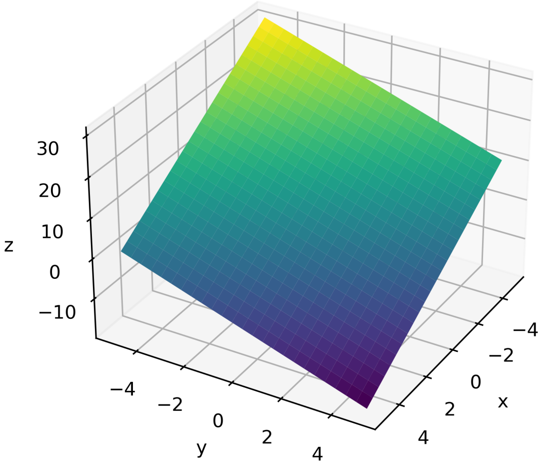
$$w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}$$



Exemplo

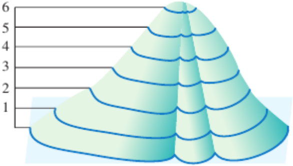
Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

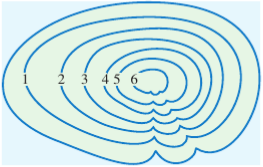
```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x, y):
    return 6-3*x-2*y

x =y=np.linspace(-5,5, 25)

X,Y=np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

fig=plt.figure()
ax=plt.axes(projection='3d')

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.plot_surface(X, Y, Z,cmap='viridis')

plt.show()
```


30
20
10
0
−10
z
−4
−2
0
2
4
y
−4
−2
0
2
4
x

Curvas e Superfícies de Nível

Uma curva ao longo da qual uma função $z = f(x, y)$ tem valor constante é denominada curva de nível da função f.

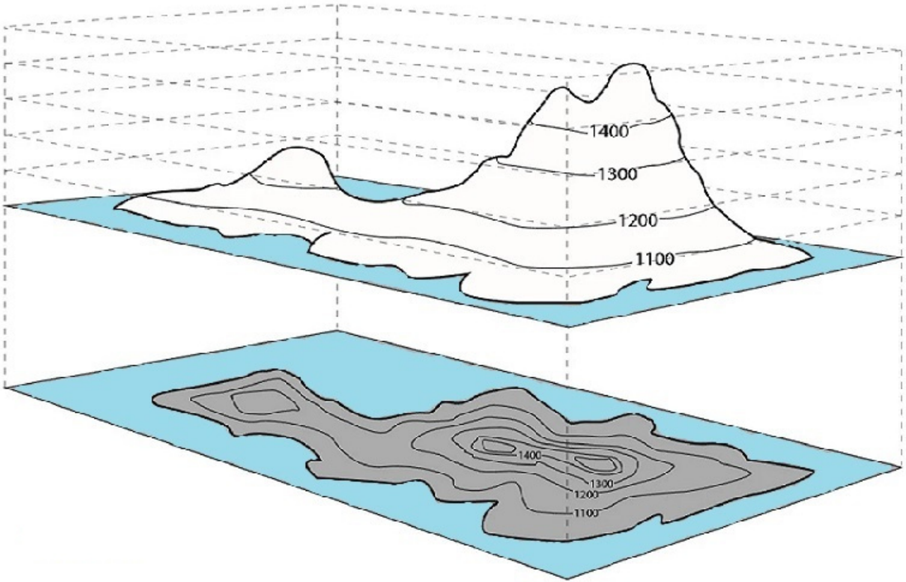




Quando a função f representa a temperatura, as curvas de nível de f são chamadas isotermas. Se f representa o potencial elétrico, as curvas de nível de f são ditas curvas equipotenciais. A equação da curva de nível ao longo da qual a função assume valor constante k é

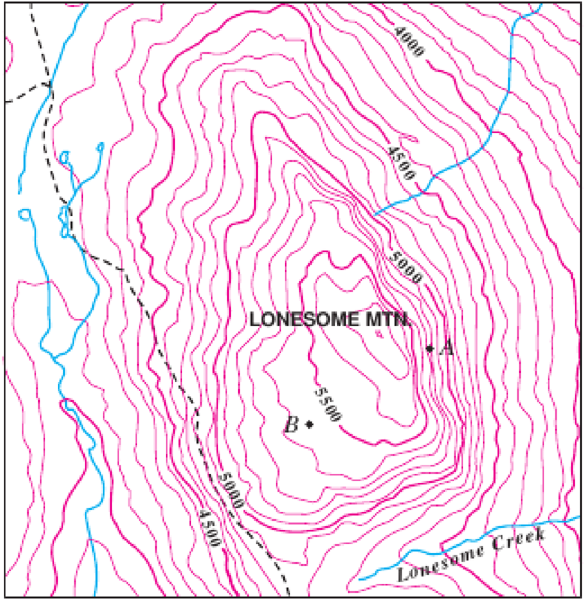
$$f(x, y) = k.$$

Se S é a superfície do gráfico de uma função f, um conjunto de curvas de nível de uma função f é dito um mapa de contorno da superfície S.

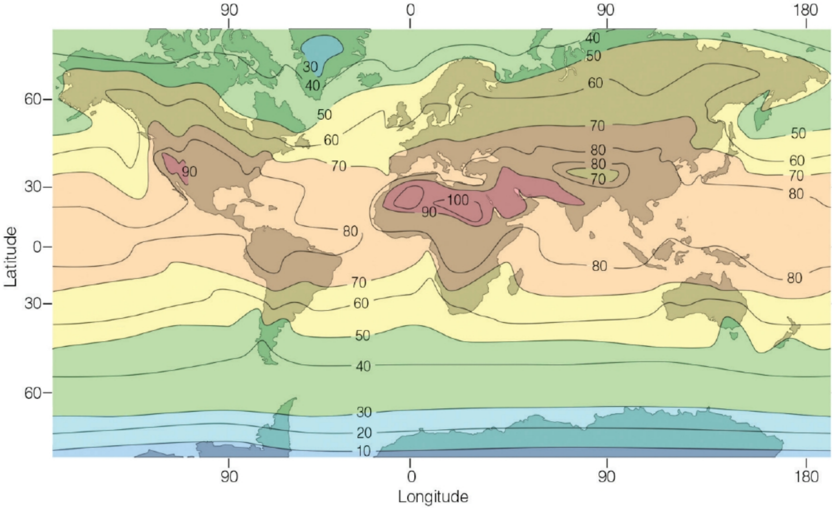

1400
1300
1200
1100
1400
1300
1200
1100

Exemplo

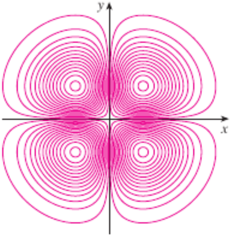
A temperatura em cada ponto (x, y) de uma placa de metal plana é dada, em graus, pela função $T(x, y) = 9x^2 + 4y^2$. Faça uma mapa de contorno das isotermas.



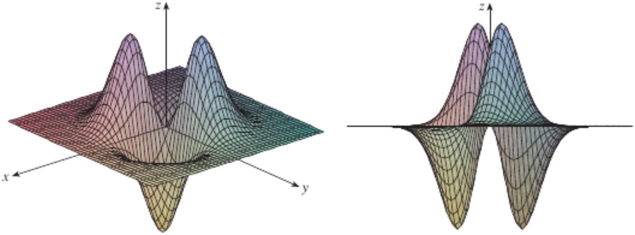
Mapa topográfico de uma região montanhosa.



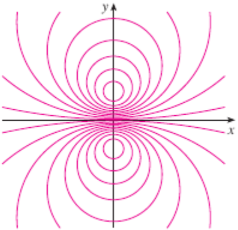
Temperatura média do ar ao nível do mar no mês de julho em Fahrenheit



(a) Curvas de nível de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Duas vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



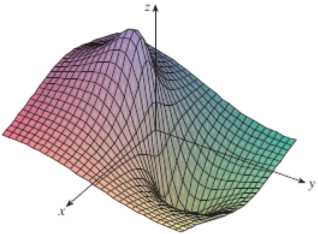
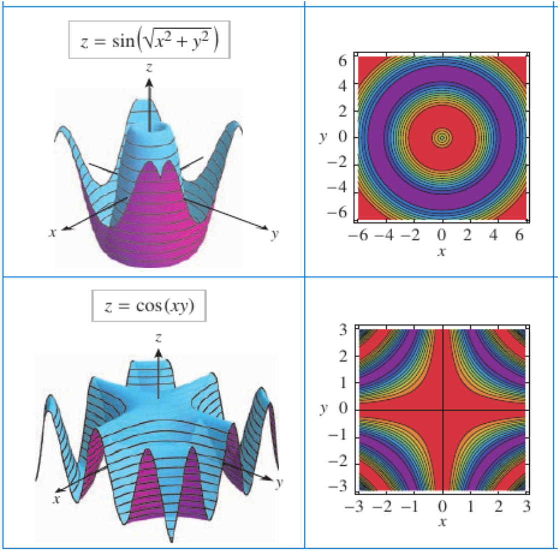
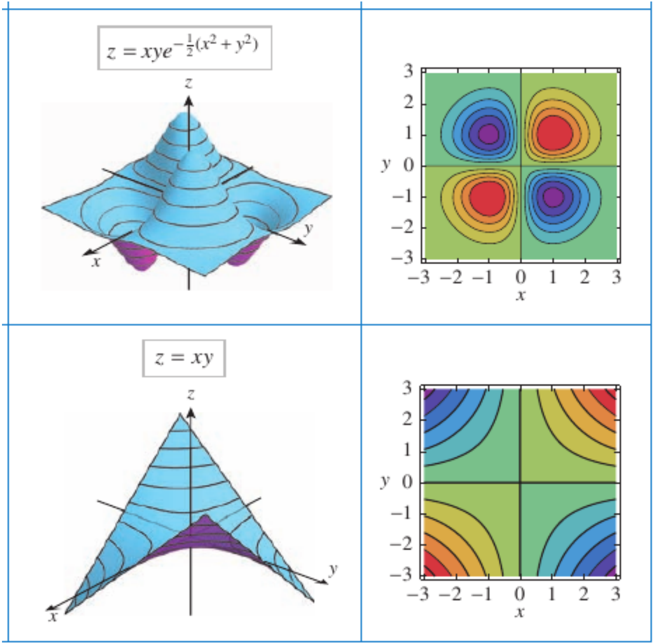


FIGURA 19 (c) Curvas de nível de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



Degradê de cores para indicar os níveis. Varia do roxo para o vermelho na ordem crescente.



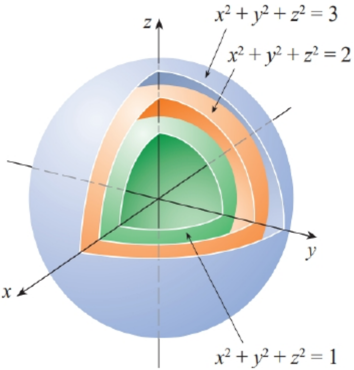
$z = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$
$z = xy$
x
y
z

Superfícies de Nível

No caso de funções de três variáveis, um conjunto no qual uma função $f(x, y, z)$ tem valor constante é dita uma superfície de nível da função f.

Exemplo

Descreva as superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.



Para Casa 7

1. Esboce a região de domínio da função
$$f(x,y) = x\log(y^2 - x)$$
2. Determine o domínio e esboce o gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
3. Faça um mapa de contorno da função $f(x,y) = 4 - x^2 - y$ para os níveis $5, 4, 3, 2, 1, 0, -1$ e faça um esboço do gráfico.
4. Descreva as superfícies de nível da função $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$.

Sumário

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Usamos a notação

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

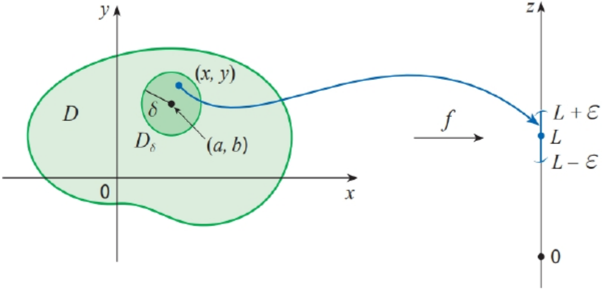
para indicar que os valores de $f(x, y)$ se aproximam do número L quando o ponto (x, y) se aproxima do ponto (a, b) ao longo de qualquer cominho contido no domínio da função f.

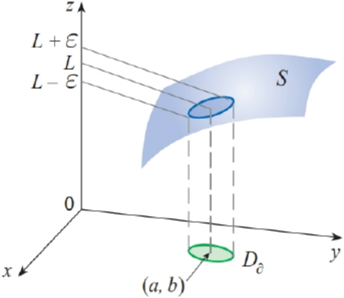
Definição 8

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é o número L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$, então $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.


y
(x, y)
D
δ
D_δ
(a, b)
0
x
f
z
L + ε
L
L − ε
0


z
L + ε
L
L − ε
S
0
y
x
D_δ
(a, b)

Todas as propriedades de limites de funções de uma variável se estendem às funções de várias variáveis. Por exemplo, o limite da soma, diferença, produto ou quociente é a soma, diferença, produto ou quociente dos limites, respectivamente, contanto que esses limites existam e que os denominadores não se anulem.

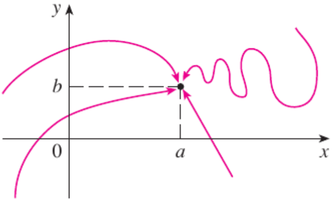
Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{(x,,y)\to(-1,2)} \left(2x^2y - \frac{3y^2}{x+y}\right)$.

Mostrando que um limite não existe

Quando o limite de uma função existe em um ponto, então o limite tem que ser o mesmo ao longo de todos os caminhos que se aproximam do ponto.

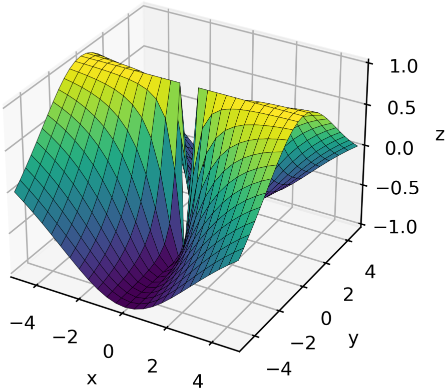
No plano podemos nos aproximar de um ponto (a, b) por um número infinito de caminhos, assim se existem dois caminhos diferentes tais que $f(x, y)$ tende a valores distintos, então o limite não existe.



Exemplo

Mostre que o seguinte limite não existe

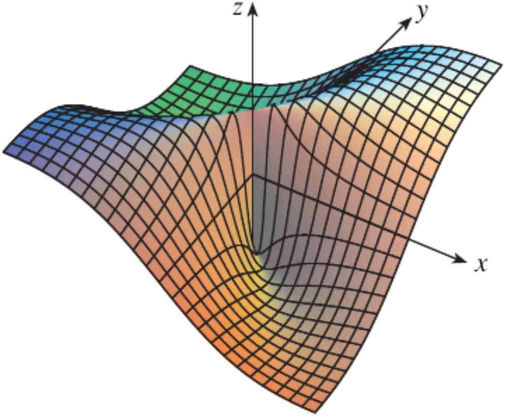
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$



Exemplo

Mostre que o seguinte limite não existe

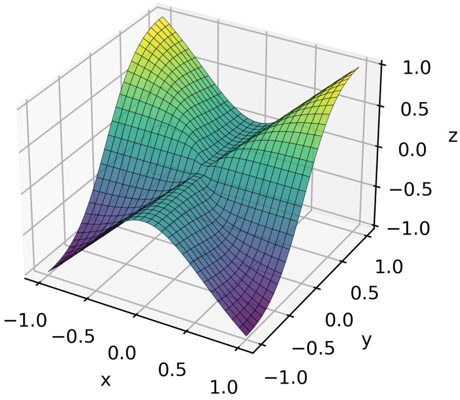
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$



Exemplo

Mostre que o seguinte limite existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$



Continuidade

Definição 9

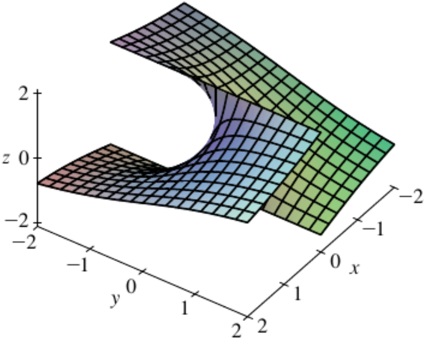
Sejam f uma função real de duas variáveis e (a, b) um ponto do domínio de f. Dizemos que f é contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Dizemos que f é contínua em D se f é contínua em todos os pontos de D.

Exemplo

- ⓐ Funções racionais são contínuas em todos os pontos de seu domínio.
- ⓑ A função $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ é contínua em todo o seu domínio pois a composta de funções contínuas também é contínua.



Exemplo

Determine os pontos de continuidade de

a. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analogamente podemos generalizar estes resultados para funções de mais de duas variáveis quaisquer.

Para Casa 8

1. Decida sobre a existência do seguinte limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.
2. Determine os pontos de continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y = (0,0). \end{cases}$$

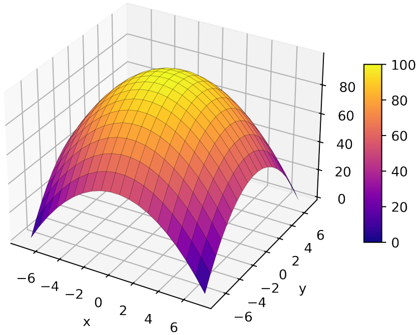
3. Revise a definição de derivada de função de uma variável $y = f(x)$.

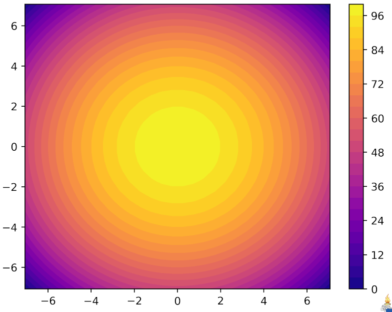
Sumário

Suponha que a distribuição de temperaturas em uma placa quadrada é descrita pela função

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2, \text{ com } -5\sqrt{2} \leq x, y \leq 5\sqrt{2},$$

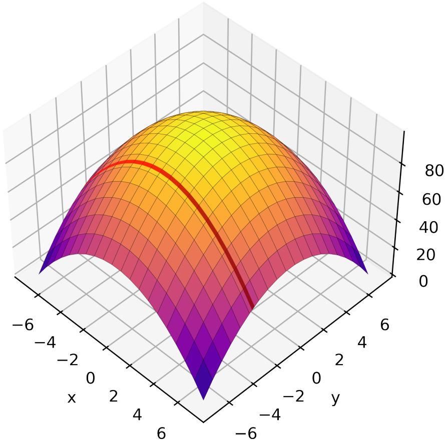
onde a temperatura é medida em $^\circ C$ e o comprimento em metros.





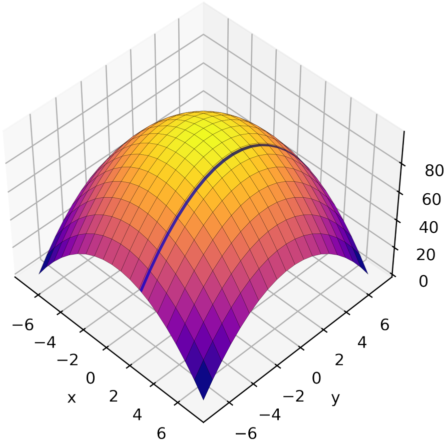
Se fixarmos $y = -3$ e deixarmos x variar livremente, teremos uma função apenas da variável x, cujo gráfico, é uma curva sobre a superfície do gráfico de de f.

$$f_1(x) = f(x, -3) = 91 - x^2, \ -5\sqrt{2} \leq x \leq 5\sqrt{2}$$



Analogamente, se fixarmos $x = 2$ e deixarmos y variar livremente, teremos uma função apenas da variável y, cujo gráfico, é uma curva sobre a superfície do gráfico de de f.

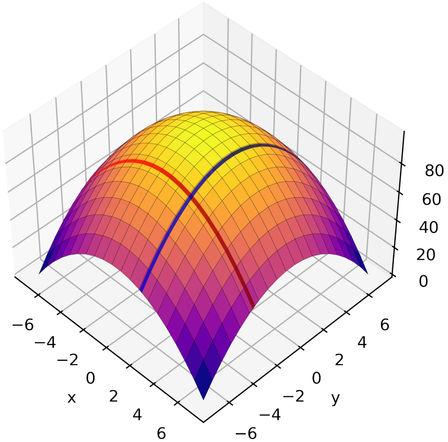
$$f_2(y) = f(2, y) = 96 - y^2, \; -5\sqrt{2} \leq y \leq 5\sqrt{2}$$



Em resumo, temos

$$f_1(x) = f(x, -3) = 91 - x^2, \ -5\sqrt{2} \leq x \leq 5\sqrt{2}$$

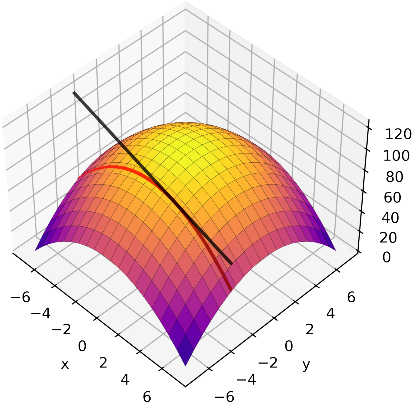
$$f_2(y) = f(2, y) = 96 - y^2, \ -5\sqrt{2} \leq y \leq 5\sqrt{2}$$



É fácil ver que $f_1'(x) = -2x$. Assim, por exemplo, $f_1'(2) = -4$.

Isso nos diz que a taxa de variação da temperatura, no ponto $P = (2, -3)$, é de $-4°C/m$ na direção positiva do eixo x.

Em outras palavras, se caminharmos sobre a placa, a partir do ponto $P = (2, -3)$, direção positiva do eixo x, a temperatura vai cair a uma taxa de $-4°C/m$.



Sabemos que a derivada de f_1 em um ponto a é dada por:

$$f_1'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,-3) - f(a,2)}{h}.$$

Sabemos que a derivada de g em um ponto a é dada por:

$$f_1'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,-3) - f(a,2)}{h}.$$

De modo geral, se fixarmos um ponto genérico $y = b$, fazendo $f_1(x) = f(x,b)$, teremos:

$$f_1'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$

Analogamente, se fixarmos um ponto genérico $x = a$, fazendo $f_2(y) = f(a,y)$, teremos:

$$f_2'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f_2(b+h) - f_2(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$

Definição 10

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(a, b) \in U$. A derivada parcial de f em relação a x no ponto (a, b) é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$

quando este limite existe. Analogamente, A derivada parcial de f em relação a y no ponto (a, b) é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h},$$

quando este limite existe.

Exemplo

Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Analogamente se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função definida em um aberto U contendo (x_0, y_0, z_0). As derivadas parcial de f em relação a x, y e z no ponto (x_0, y_0, z_0) são dadas pelos limites

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

quando estes limites existem.

Exemplo

Se $f(x, y, z) = e^{xy} \log(z)$, determine as derivadas parciais.

Para Casa 9

1. Se $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcule f_x e f_y.
2. Se $f(x, y, z) = x\sin(y - z)$, determine as derivadas parciais.

Se $z = f(x, y)$ é uma função, então $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ também são funções de duas variáveis e portanto podemos definir quatro novas funções que são chamadas de derivadas parciais de segunda ordem de f, a saber:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Exemplo

Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

Teorema 11

Se $z = f(x, y)$ é de classe C^2, então suas derivadas mistas são iguais, isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

As derivadas parciais ocorrem em Equações Diferenciais Parciais que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a EDP

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

é chamada de Equação de Laplace. As soluções dessa equação são chamadas de funções harmônicase são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

Exemplo

Mostre que a função $u(x, y) = e^x \sin(y)$ é uma solução da equação de Laplace.

A Equação da Onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

descreve o movimento de uma onda. Por exemplo, se $u(x,t)$ representa o deslocamento da corda vibrante de um violão no instante t e à distância x de uma das extremidades da corda, então $u(x,t)$ satisfaz a equação da onda. A constante a depende da densidade da corda e da tensão aplicada a nela.

Exemplo

Verifique que $u(x,t) = \sin(x - at)$ satisfaz a equação da onda.

Para Casa 10

1. Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(x,y) = xy - e^x \cos y$.
2. Calcule f_{xxyz} se $f(x,y,z) = \sin(3x + yz)$.

Aproximação Linear em uma variável

Em funções de uma variável sabemos que se $f(x)$ é derivável em x_0, sabemos que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Assim, para pequenos acréscimos Δx na quantidade x_0, o valor de $f(x_0 + \Delta x)$ é aproximadamente $L = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, com erro

$$E(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x,$$

onde $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{E(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Em outras palavras, o erro E é menor que o erro Δx, para valores pequenos de Δx.

Neste caso dizemos que f é diferenciável e que

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é uma aproximação linear de f no ponto x_0.

Como podemo obter o plano tangente ao gráfio da função $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ no ponto $P = (1,2,4)$?

Fixando $y = 2$ e fazendo x variar, temos a curva sobre o gráfico passando por P

$$\alpha(x) = (x, 2, 5 - x^2),\ x \in \mathbb{R}.$$

cujo o vetor tangente em P é

$$u = \alpha'(1) = (1, 0, -2).$$

Analogamente obtemos que outro vetor tangente ao gráfico no ponto P é

$$v = (0, 1, -4).$$

Como u e v são LI, sabemos que o produto vetorial é um vetor normal ao plano, daí, obtemos que a equação do plano tangente é

$$2x + 2y + z - 10 = 0.$$

No caso geral, se $z = f(x, y)$, então o plano tangente no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dado pela equação

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{3}$$

O plano tangente é a melhor aproximação linear da função $z = f(x, y)$ nas proximidades do ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e a função

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é denominada linearização de f no ponto (x_0, y_0).

Diferentemente do caso unidimensional, para que essa aproximação seja boa, não é suficiente que apenas existam as derivadas parciais. Para isso, precisamos definir uma noção de diferenciabilidade análoga.

Definição 12

Uma $f : U \to \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, é dita diferenciável em $(x_0, y_0) \in U$ quando existem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ tais que a função erro definida por

$$E(\Delta x, \Delta y) = $$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y,$$

satisfaz, $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$

Esta definição diz que uma função diferenciável é aquela para a qual a aproximação linear é uma boa aproximação quando (x, y) está próximo de (x_0, y_0).

Exemplo

Mostre que $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ é diferenciável em $(1, 1)$ e determine a aproximação linear.

Exemplo

Mostre que a função $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$, possui derivadas parciais no ponto $(0, 0)$ mas não é diferenciável, isto é, a equação do que seria o plano tangente existe, mas não fornece uma boa aproximação.

Definição 13

Uma função $f : U \to \mathbb{R}$, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, é dita de classe C^1 em U quando possui derivadas parciais contínuas em U.

Teorema 14

Se $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 em U, então f é diferenciável em U.

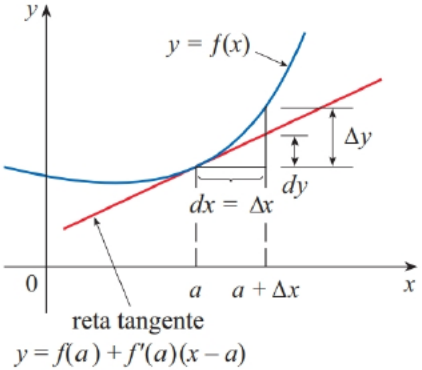
Exemplo

Mostre que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em $(1, 0)$ e encontre sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

Diferenciais

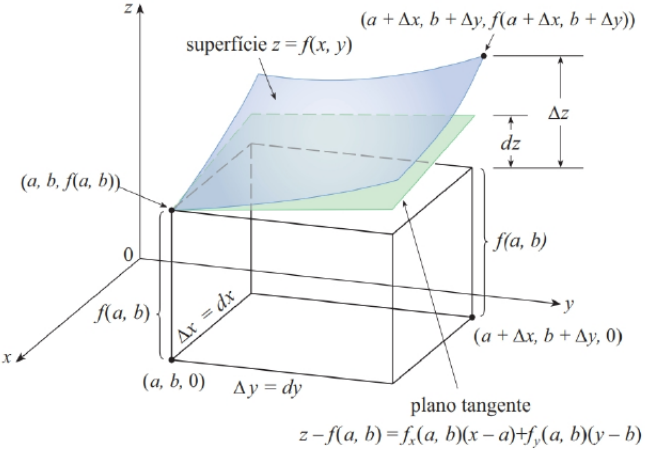
Para uma função diferencial de uma única variável, $y = f(x)$, definimos a diferencial dx como uma variável independente, ou seja, dx pode valer qualquer número real. A diferencial de y é definida como

$$dy = f'(x)dx$$



Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos as diferenciais dx e dy como variáveis independentes. Então, a diferencial dz, também chamada de diferenciação total, é definida por

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$



Exemplo

Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, ε cm.

1. Use diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.
2. Se o raio e a altura forem medidos com erro máximo de 0.1 cm, qual será o erro máximo estimado para o volume? Estime o erro relativo.

Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis.

Diferenciabilidade

Uma função $w = f(x, y, z)$ é diferenciável em (x_0, y_0, z_0) quando existem as derivadas parciais no ponto (x_0, y_0, z_0) e

$$E(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta y - \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta z,$$

satisfaz, $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \frac{E(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{\|(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\|} = 0$

Se $w = f(x, y, z)$ é diferenciável em (x_0, y_0, z_0), então

A linearização de f no ponto (x_0, y_0, z_0).

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

A diferencial dw é definida por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Para Casa 11

1. Para quais valores de (x, y), $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ é diferenciável é diferenciável? Justifique.
2. Mostre que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$ mas possui derivadas parciais em $\mathbb{R}^2$.

Regra da Cadeia 1

Sejam $z = f(x, y)$ uma função diferenciável e $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ também diferenciável, então a função composta $z(t) = f(\alpha(t))$ é diferenciável e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemplo

Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \sin(2t)$ e $y = \cos(t)$, determine $\frac{dz}{dt}$ em $t = 0$.

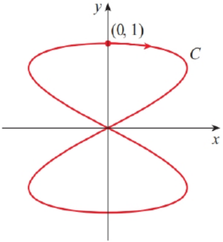


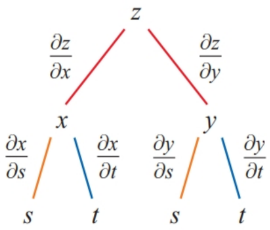
FIGURA 1
A curva $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$

Regra da Cadeia 2

Sejam $z = f(x, y)$, $x = x(t, s)$ e $y = y(t, s)$ são funções diferenciáveis, então

a) $$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



Exemplo

Calcule as derivadas parciais da função $z = e^x \sin(y)$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$

Regra da Cadeia Caso Geral

Sejam $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $x_j = x_j(t_1, t_2, \dots, t_m)$ funções diferenciáveis, então

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_i}$$

Exemplo

Se $u = x^4 y + y^2 z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2 e^{-t}$ e $z = r^2 s \sin(t)$, determine $\frac{\partial u}{\partial s}$ quando $r = 2, s = 1$ e $t = 0$.

Para Casa 12

1. Se $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz
$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$
2. O raio de um cone circular reto está aumentando em uma taxa de 4.6 cm/s enquanto sua altura está descendo a uma taxa de 6.5 cm/s. Em qual taxa o volume do cone está variando quando o raio é 300 cm e altura é de 350 cm.

Definição 15

Seja f uma função de n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ que possui derivadas parciais no ponto $P_0 = (a_1, \ldots, a_n)$. O vetor gradiente de f em P_0, denotado por $\nabla f(P_0)$, é o vetor

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

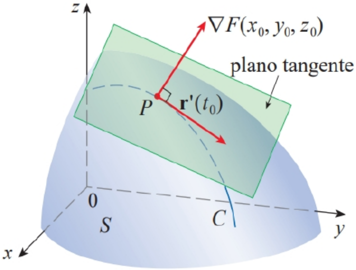
Usando a definição de vetor gradiente, a regra da cadeia pode ser escrita da forma

$$\frac{dz}{dt} = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Teorema 16

Seja $z = f(x, y)$ uma função de classe C^1 definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. O vetor gradiente é normal a qualquer curva de nível da função f nos pontos em que não se anula.

O Teorema anterior também é válido para funções de três variáveis. Neste caso o vetor gradiente é normal à superfície de nível $F(x, y, z) = k$. Este resultado pode ser usado para encontrar plano tangente à superfícies que não estão expressas como gráfico de função.



Exemplo

Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície S de equação $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.

Derivadas Direcionais

Definição 17

A derivada direcional de uma função $z = f(x, y)$ em um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ na direção do vetor unitário $u = (a, b)$ é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + hu) - f(P_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h},$$

se este limite existir.

Teorema 18

Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot u.$$

A mesma definição e o último teorema valem para para funções de qualquer número de variáveis.

Exemplo

Determine a derivada direcional da função f no ponto P na direção do vetor v em cada caso:

1. $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$, $P = (2, -1)$ e $v = (2, 5)$.
2. $f(x, y, z) = x\,\mathrm{sen}(yz)$, $P = (1, 3, 0)$ e $v = (1, 2, -1)$.

Teorema 19

O valor máximo da derivada direcional de uma função diferenciável f é a $\|\nabla f\|$ e ocorre na direção do vetor gradiente ∇f.

Exemplo

1. Em que direção a função $f(x, y) = xe^y$ tem a maior taxa de variação? Qual é o valor da maior taxa de variação?
2. Seja $T(x, y, z) = \dfrac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ a temperatura, em graus Celsius, em um ponto (x, y, z) do espaço. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

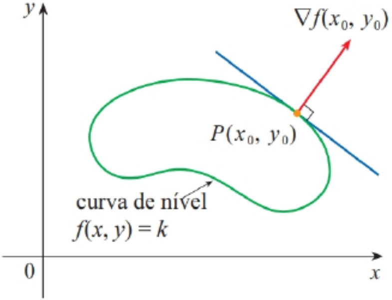
Propriedades do Vetor Gradiente

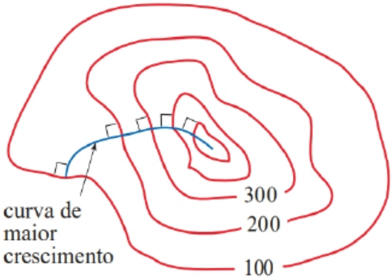
Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis e suponha que $\nabla f(P) \neq 0$.

- A derivada direcional de f em P, na direção de um vetor unitário u, é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P) = \nabla f(P) \cdot u$$

- $\nabla f(P)$ aponta na direção em que a taxa de crescimento de f em P é máxima e essa taxa máxima de variação é igual a $\|\nabla f(P)\|$
- $\nabla f(P)$ é perpendicular à curva ou à superfície de nível de f em P.


$\nabla f(x_0, y_0)$
$P(x_0, y_0)$
curva de nível
$f(x, y) = k$
y
0
x


curva de
maior
crescimento
300
200
100

A função $F(x, y) = x^2 + y^2$ tem como curvas de nível círculos centrados na origem.

$$x^2 + y^2 = k, \;\; k \geq 0.$$

Sabemos que o círculo não é o gráfico de uma função de uma variável, entretanto, ao isolarmos uma das variáveis, ele pode ser visto como a união de dois gráficos:

$$y = \pm\sqrt{k - x^2} \text{ ou } x = \pm\sqrt{k - y^2}$$

Entretanto, na maioria dos casos não é possível isolar uma das variáveis. Nestes casos, como podemos garantir que um pedaço da curva pode ser vista como gráfico de função? Ou dito de outra forma, como garantir que uma variável pode ser colocada em função das demais?

Teorema da Função Implícita I

Suponha que

1. A função $z = F(x, y)$ seja de classe C^1;
2. $F(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Então, existe uma vizinhança I em torno do ponto x_0 e uma única função $y = y(x)$ também de classe C^1 tais que

$$F(x, y(x)) = 0, \quad \text{para todo } x \in I$$

e vale

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Exemplo

Mostre que $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ define y como função de x na vizinhança do ponto $(3, 3)$ e calcule $y'(3)$ a derivada neste ponto.

Teorema da Função Implícita II

Suponha que

1. A função $F(x,y,z)$ seja de classe C^1;
2. $F(x_0,y_0,z_0)=0$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Então, existe uma vizinhança U em torno do ponto (x_0,y_0) e uma única função $z=z(x,y)$, também de classe C^1, tais que

$$F(x,y,z(x,y))=0, \quad \text{para todo } (x,y)\in U$$

e vale

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

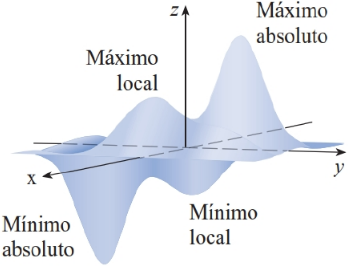
Exemplo

Verifique que a equação $x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 9$ define z com função de x e y numa vizinhança do ponto $(1, 0, 1)$ e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1, 0)$.

Sumário

Definição 20

1. Dizemos que uma função f de duas variáveis tem um valor máximo local no ponto (a, b) se existir uma bola aberta $B_r(a, b)$ tal que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in B_r(a, b)$.
2. Dizemos que uma função f de duas variáveis tem um valor mínimo local no ponto (a, b) se existir uma bola aberta $B_r(a, b)$ tal que $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in B_r(a, b)$.



Teorema 21

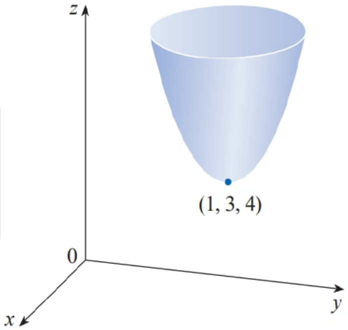
Se $f(x, y)$ tem um extremo local em (a, b) e possui derivadas parciais em (a, b), então

$$\nabla f(a, b) = 0.$$

Um ponto (a, b) tal que $\nabla f(a, b)$ não existe ou $\nabla f(a, b)) = 0$ é dito ponto crítico ou ponto estacionário de f.

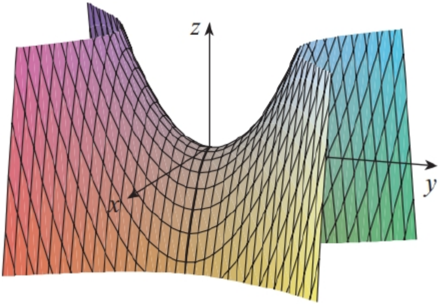
Exemplo

Determine os extremos relativos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$



Exemplo

A função $f(x,y) = y^2 - x^2$ tem ponto crítico em $(0,0)$ mas não possui extremo relativo!



ponto de sela

Foto de Stan Wagon, Macalester College

Matriz Hessiana

Se f é uma função de duas variáveis com todas as derivadas de ordem 2 no ponto (a, b), definimos

$$D^2 f(a,b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix},$$

chamada matriz Hessiana da função f no ponto (a, b).

Teste da Segunda Derivada

Teorema 22 (Teste da Segunda Derivada)

Seja $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 em uma bola $B_r(a, b)$ tal que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. Neste caso,

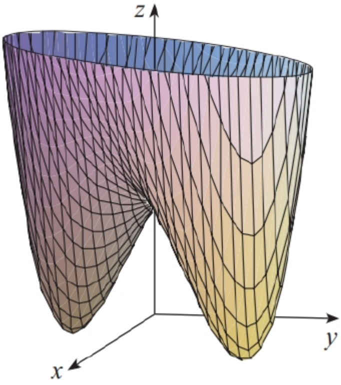
a. Se $\det D^2 f(a, b) > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então (a, b) é máximo local.
b. Se $\det D^2 f(a, b) > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então (a, b) é mínimo local.
c. Se $\det D^2 f(a, b) < 0$, então (a, b) é ponto de sela.

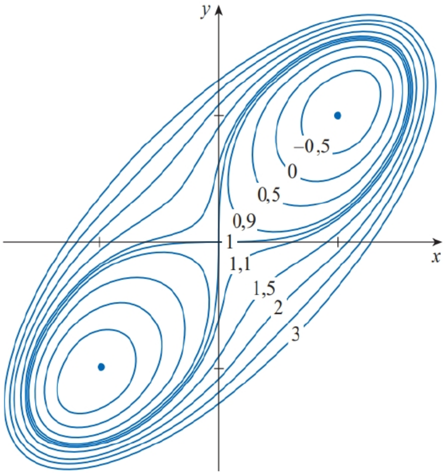
Observação 23

Se $\det D^2 f(a, b) = 0$, nada podemos concluir.

Exemplo

Localize e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.





Para Casa 13

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo da caixa.

Definição 24

Seja uma função f de duas variáveis definida em um conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$.

1. Dizemos que f tem um valor máximo absoluto em U se existir um ponto $(a, b) \in U$ tal que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in U$. Neste caso, $f(a, b)$ é o valor máximo absoluto de f em U.
2. Dizemos que f tem valor mínimo absoluto em U se existir um ponto $(a, b) \in U$ tal que $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in U$. Neste caso, $f(a, b)$ é o valor mínimo absoluto de f em U

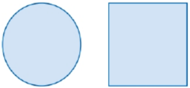
Exemplo

1. A função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ tem máximo absoluto em $\mathbb{R}^2$ no ponto $(0, 0)$.
2. A função $f(x, y) = x$ não tem máximo nem mínimo absoluto em $\mathbb{R}^2$.

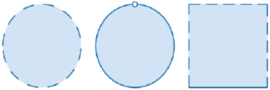
Topologia no plano

Antes de enunciarmos nosso próximo resultado, precisamos de algumas noções topológicas no plano.

- Um conjunto é dito limitado se ele está contido em algum disco.
- A fronteira de um conjunto D, denotada por ∂D, é formada por pontos (a, b) tais que qualquer disco aberto com centro em (a, b) contém pontos de D e pontos que não estão em D.
- Um conjunto D de $\mathbb{R}^2$ é dito fechado se contém todos os pontos de sua fronteira, onde
- Um conjunto fechado e limitado é dito ser compacto.
- Um conjunto é aberto quando seu complementar é fechado.



(a) Conjuntos fechados



(b) Conjuntos que não são fechados

Teorema 25 (Teorema de Weierstrass)

Se f é uma função contínua definida em um conjunto fechado e limitado D então f assume valor máximo e mínimo absolutos em U.

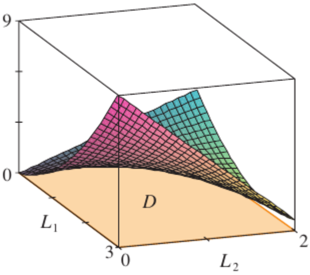
Determinação de Extremos Absolutos

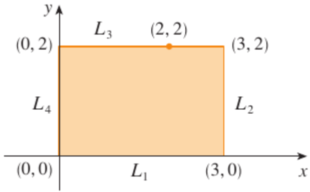
Para determinarmos os extremos absolutos de uma função contínua definida em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determinar os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determinar os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos anteriores será o máximo absoluto e o menor deles o valor mínimo absoluto.

Exemplo

Determine os valores extremos da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x,y) |\ 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.



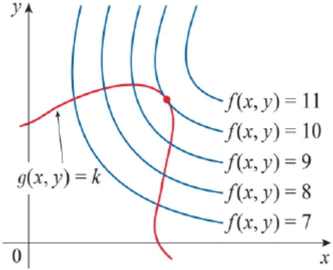


Multiplicadores de Lagrange em duas Variáveis

Teorema 26

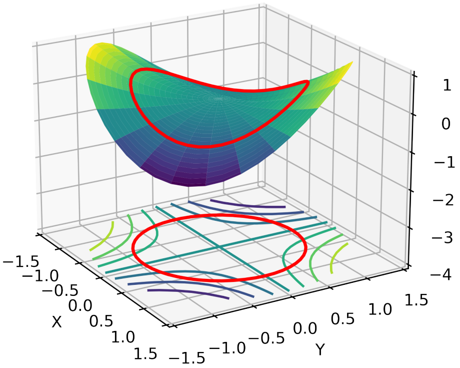
Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funções de classe C^1 definidas em um aberto U que contém a curva C de equação $g(x,y)=k$. Se $f(x,y)$ restrita à curva C assume um valor máximo ou mínimo em $(x_0,y_0)\in C$ e $\nabla g(x_0,y_0)\neq\vec{0}$, então existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

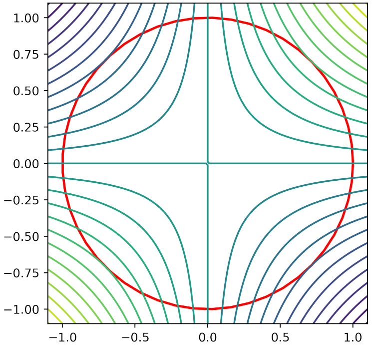
$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$$



Exemplo

Determine os valores extremos da função $f(x,y) = xy$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.





Para Casa 14

Determine os pontos da hipérbole $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$ que estão mais próximos da origem.

Teorema 27

Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ funções de classe C^1 definidas em um aberto U que contém a superfície S de equação $g(x,y,z)=k$. Se $f(x,y,z)$ restrita à superfície S assume um valor máximo ou mínimo em $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$ e $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ não é nulo, então existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$$

Exemplo

Determine os pontos da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(3,1,-1)$.

Multiplicadores de Lagrange com Duas Restrições

Teorema 28

Sejam $f(x,y,z)$, $g_1(x,y,z)$ e $g_2(x,y,z)$ funções de classe C^1 definidas em um aberto U que contém a curva C de interseção das superfícies de equações $g_1(x,y,z) = k_1$ e $g_2(x,y,z) = k_2$. Se $f(x,y,z)$ restrita à curva C assume um valor máximo ou mínimo em $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ e $\nabla g_1(x_0,y_0,z_0) \times \nabla g_2(x_0,y_0,z_0)$ não é nulo, então existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g_1(x_0,y_0,z_0) + \mu \nabla g_1(x_0,y_0,z_0)$$

Exemplo

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da interseção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.