

Equações Diferenciais Parciais II

$$\begin{cases} u_t + \textcolor{red}{L}u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ u = g, & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

$$\textcolor{red}{L}u = -\operatorname{div}(\mathbf{A}(x, t)\nabla u) + \mathbf{b}(x, t) \cdot \nabla u + c(x, t)u$$

Prof. Luiz Viana e Prof. Reginaldo Demarque

Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IMEUFF
Pós-Graduação em Matemática – PGMAT

26 de março de 2026



Sumário

- 1 Preliminares
- 2 Convolução
- 3 Distribuições
- 4 Espaços de Sobolev
- 5 Imersões de Sobolev
- 6 Espaço Dual
- 7 Equações Lineares Elípticas de 2ª ordem
- 8 Equações Lineares Parabólicas de 2ª ordem





Brezis, Haim.

Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations

Springer Science & Business Media, 2011.



Cavalcanti, Marcelo M. e Cavalcanti, Valéria N. D.

Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev

UEM, 2011. [▶ LINK](#).



Evans, Lawrence C.

Partial differential equations

Vol. 19. American mathematical society, 2010.



Kesavan, S.

Topics in Functional Analysis and Applications

New Age, 2nd ed, 2015.



Ziemer, William P

Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation

Springer Science & Business Media, vol. 120, 2012.



Resultados sobre Integração que todos devem saber

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida

- Dizemos que X é σ -finito quando existe uma família enumerável (X_n) em $\mathcal{M}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ e $\mu(X_n) < +\infty$.
- Denotaremos por $L^1(X)$ o espaço das funções integráveis e definimos

$$\|f\|_{L^1(X)} = \int_X |f| d\mu.$$

- $f \in L^1(X)$ se, e somente se, $\|f\|_{L^1(X)} < +\infty$.



Teorema 1.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue).

Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(X)$ que satisfaz:

- a $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.s em X ,
- b Existe $g \in L^1(X)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.s. em X .

Então $f \in L^1(X)$ e $\|f_n - f\|_{L^1(X)} \rightarrow 0$.



Teorema de Fubini-Tonelli em $\mathbb{R}^N$

Sejam $X \subset \mathbb{R}^r$ e $Y \subset \mathbb{R}^s$ conjuntos mensuráveis com $m_r(X) > 0$ e $m_s(Y) > 0$. Então $X \times Y \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ é mensurável e

$$m_{r+s}(X \times Y) = m_r(X)m_s(Y).$$

Além disso, se $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ e $g : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ são funções mensuráveis, então a função

$$h(x, y) = f(x)g(y)$$

é mensurável.



Teorema de Fubini-Tonelli em $\mathbb{R}^N$

Dado $F : X \times Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definimos as funções

$$F_x(y) = F(x, y), \quad y \in Y \text{ e } F^y(x) = F(x, y), \quad x \in X$$

Teorema 1.2 (Tonelli).

Sejam $X \subset \mathbb{R}^r$ e $Y \subset \mathbb{R}^s$ conjuntos mensuráveis. Se $F : X \times Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é uma **função mensurável** e **não negativa**, então as funções $f(x) = \int_Y F_x dy$ e $g(y) = \int_X F^y dx$ são mensuráveis e

$$\int_{X \times Y} F(x, y) dx dy = \int_X \left[\int_Y F(x, y) dy \right] dx = \int_Y \left[\int_X F(x, y) dx \right] dy$$



Teorema 1.3 (Fubini).

Sejam $X \subset \mathbb{R}^r$ e $Y \subset \mathbb{R}^s$ conjuntos mensuráveis. Se $F \in L^1(X \times Y)$, então

- 1 $F_x \in L^1(Y)$ q.t.p. $x \in X$ e $F_y \in L^1(X)$ q.t.p. $y \in Y$.
- 2 $f(x) = \int_Y F_x dy \in L^1(X)$ e $g(y) = \int_X F_y dx \in L^1(Y)$.

Além disso,

$$\int_{X \times Y} F(x, y) dx dy = \int_X \left[\int_Y F(x, y) dy \right] dx = \int_Y \left[\int_X F(x, y) dx \right] dy$$



Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$.

- $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, é o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis tais que $\|u\|_{L^p(\Omega)} < +\infty$, onde

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}, & \text{para } 1 \leq p < +\infty \\ \text{ess sup } |u(x)|, & \text{para } p = +\infty. \end{cases}$$

Lembrando que: $\text{ess sup } |u(x)| = \inf \{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}$.

- $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma dada por $\|u\|_{L^p(\Omega)}$. No caso $p = 2$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$



- $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in L^p(K)$ para cada K compacto de Ω .
- Para cada compacto $K \subset \Omega$, defina $p_K : L^p_{\text{loc}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$p_K(u) = \left(\int_K |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Dizemos que $u_m \rightarrow u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, quando

$$p_K(u_m - u) \rightarrow 0, \quad \forall K \subset \Omega.$$

- $L^p_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (a identidade é contínua).



Desigualdade de Hölder

Sejam $1 \leq p, q \leq +\infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 1.4 (Ver [Brezis, Theorem 4.9]).

Sejam (f_n) uma sequência em L^p e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $f_n \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que

- a $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.s. em Ω
- b $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.s. em Ω .



Definição 1.5.

Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, define-se o **suporte de u** , denotado por $\text{supp } u$, o fecho **em Ω** do conjunto dos pontos onde u não se anula, isto é,

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega; u \neq 0\}}^{\Omega} = \overline{u^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}^{\Omega}.$$

Dizemos que uma função tem **suporte compacto**, quando o suporte de u é um compacto **do $\mathbb{R}^N$** . Denotaremos por $C_c^{\infty}(\Omega)$ o subconjunto de $C^{\infty}(\Omega)$ das funções com suporte compacto.

Observação 1.6.

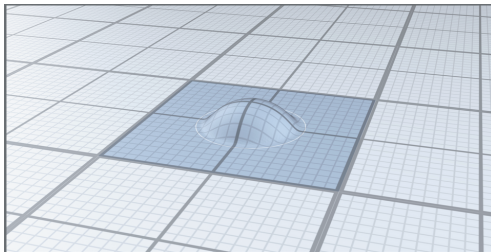
Note que estamos considerando o fecho em Ω não em $\mathbb{R}^N$, ou seja, o suporte é fechado em Ω ! Caso contrário, sempre que Ω fosse limitado, o suporte seria compacto. Por exemplo se $\Omega = B(0, 1)$ e $u(x) = 1$, então $\text{supp } u = B(0, 1)$ que não é fechado em $\mathbb{R}^N$.



Exercício 1.1.

$$\eta(x) := \begin{cases} \exp(-1/(1 - \|x\|^2)), & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Mostre que $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\text{supp } \eta = \overline{B_1(0)}$.



by JoshDif, Wikimedia Commons, licensed under CC BY-SA 4.0



Definição 1.7.

Seja X um subconjunto arbitrário do $\mathbb{R}^N$. Dizemos que uma cobertura aberta $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de X é **localmente finita** se todo $x \in X$ possui uma vizinhança V que intercepta apenas um número finito de U_λ .

Proposição 1.8 (Partição da Unidade, veja [Kesavan, Theorem 1.2.1]).

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Dada uma cobertura aberta $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de Ω , existe uma família de funções $(\theta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ definidas em Ω , de classe C^∞ , chamada **partição da unidade** subordinada à cobertura $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, tais que

- ① $\text{supp } \theta_\lambda \subset U_\lambda$.
- ② $(\text{supp } \theta_\lambda)_\lambda$ é localmente finita.
- ③ $0 \leq \theta_\lambda \leq 1$, para todo $\lambda \in \Lambda$.
- ④ $\sum_{\lambda \in \Lambda} \theta_\lambda(x) = 1$.



Definição 1.9.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $K \subset V \subset \Omega$, com K compacto e V aberto. Dizemos que $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é *uma função corte subordinada a V e identicamente 1 em K* quando

$$\phi \in C_c(\Omega), \text{ supp } \phi \subset V, \phi = 1 \text{ em } K \text{ e } 0 \leq \phi(x) \leq 1, \forall x \in \Omega.$$

Notação do Rudin:

$$K \prec \phi \prec V$$



Corolário 1.10.

Seja K um compacto de $\mathbb{R}^N$. Então existem V e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $K \prec \phi \prec V$.

Demonstração.

Basta considerar a partição de unidade subordinada à cobertura $(V, \mathbb{R}^N \setminus K)$, onde V é um aberto limitado contendo K . □



Definição 1.11.

Seja $u \in L^p(\Omega)$. Definimos o **suporte de u** , denotado por $\text{supp } u$, como o conjunto obtido pela interseção de todos os subconjuntos fechados de Ω fora dos quais u se anula quase sempre.



Exercício 1.2.

Se $u \in C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, então as duas noções de suporte coincidem.

Proposição 1.12 (veja [Brezis, Theorem 4.12]).

O espaço $C_c(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq p < \infty$.



Proposição 2.1.

Dados $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, considere a função

$$h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - y)g(y) dy.$$

Então, h está bem definida e pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$



Definição 2.2.

Dados $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ definimos a *convolução* de f e g por

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - y)g(y) dy.$$

Proposição 2.3.

Dados $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então

- ① $f * g = g * f$
- ② $(f * g) * h = f * (g * h)$



Proposição 2.4.

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ($1 \leq p \leq +\infty$), então $f * g(x)$ existe para quase todo x , $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Teorema 2.5 (Desigualdade de Young).

Sejam $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$





Exercício 2.1.

- 1 Demonstre o Teorema 2.5.
- 2 Se f e g são funções para as quais a convolução está bem definida, então

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g.$$

Proposição 2.6.

Se $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ a integral da Definição 2.2 está bem definida para *todo* $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$.



Notação de Multi-índice

Considere $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$.

- Uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ de números inteiros não negativos é chamada de **multi-índice** de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$$

- Definimos o operador derivação D^α por

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_N^{\alpha_N} u(x)$$

- Escrevemos $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$. Diremos que $\beta \leq \alpha$, se $\beta_i \leq \alpha_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Com essa notação a fórmula de Leibniz é escrita como:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$



Proposição 2.7.

Sejam $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ ($k \geq 1$) e $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$. Então $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ e

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N} \text{ com } |\alpha| \leq k.$$

Em particular, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.



Definição 2.8.

Uma sequência de funções $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^N$ são ditas *funções regularizantes* quando satisfazem:

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \text{ supp } \rho_n \subset \overline{B_{1/n}(0)} \text{ } \rho_n \geq 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = 1.$$

Exemplo 2.9.

Sejam $\eta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida como no Exemplo 1.1 e $C = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x) dx \right)^{-1}$, defina $\rho(x) = C\eta(x)$. Para cada $\varepsilon > 0$, defina a seguinte família de funções:

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Tomando $\varepsilon = 1/n$, temos uma sequência de funções regularizantes.

¹A Técnica de regularização por convolução foi originalmente introduzida por Leray e Friedrichs

Proposição 2.10.

*Seja (ρ_n) uma sequência de funções regularizantes. Se $f \in C(\mathbb{R}^N)$, então $\rho_n * f \rightarrow f$ uniformemente em cada compacto do $\mathbb{R}^N$.*

Proposição 2.11.

*Seja (ρ_n) uma sequência de funções regularizantes. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p < \infty$, então $\rho_n * f \rightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, quando $n \rightarrow +\infty$.*

Proposição 2.12.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < \infty$.



Lema de Du Bois Raymond

Proposição 2.13 (Du Bois Raymond - ver [Brezis, Corollay 4.24]).

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então $u = 0$ q.s. em Ω .

Lema

Sob as hipóteses do Lema de Du Bois Raymond,

$$\int_{\Omega} u(x)g(x) dx = 0,$$

para toda $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, com suporte compacto em Ω .

Definição 3.1.

Definimos o *espaço das funções testes*, denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, o conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ dotado da seguinte noção de convergência: Dados uma sequência (φ_m) em $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dizemos que

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega),$$

quando existe $K \subset \Omega$ compacto tal que

- ① $\text{supp } \varphi_m, \text{supp } \varphi \subset K, \forall m \in \mathbb{N}$;
- ② $D^\alpha \varphi_m \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$.

Na verdade, $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço vetorial $C_c^\infty(\Omega)$ munido de uma topologia definida por uma família de seminormas. Esta topologia nos dá a noção de convergência acima. Para mais detalhes, veja [Kesavan, Appendix 2] ou [Cavalcanti, Seção 1.3].



Definição 3.2.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma *distribuição sobre Ω* é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que é contínua no sentido da convergência sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é,

para toda $\varphi_m \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, tem-se que $\langle T, \varphi_m \rangle \rightarrow 0$.

O espaço das distribuições é o dual do espaço das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ e é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.



Exemplo 3.3.

Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, então T_u definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

é uma distribuição sobre Ω .



Sendo $\mathcal{D}'(\Omega)$ o dual de um espaço vetorial topológico, podemos considerar sobre ele a topologia fraca*. Com essa topologia, temos a seguinte noção de convergência.

Definição 3.4.

Dizemos que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposição 3.5.

A aplicação $T : u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mapsto T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é linear, injetiva e contínua, isto é, $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.



Exemplo 3.6.

- ① Dado $x_0 \in \Omega$, a aplicação δ_{x_0} definida por

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição sobre Ω denominada **delta de Dirac**^a.

- ② A distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função localmente integrável.

^a δ_0 é conhecida por “função δ de Dirac” e foi introduzida por Paul Dirac em 1930. Seus cálculos simbólicos não faziam sentido matemático até a correta formulação pela Teoria das Distribuições desenvolvida por Laurent Schwartz.



Exemplo 3.7.

A sequência de funções regularizantes (ρ_n) definidas no Exemplo 2.9 converge para a distribuição delta de Dirac δ_0 . Isto é, uma sequência de funções localmente integráveis pode convergir para uma distribuição que não é definida por uma função localmente integrável.





Exercício 3.1.

Mostre que são distribuições:

- ① Seja λ um caminho retificável de classe $C^1([a, b])$ cuja imagem está contida em Ω . Defina

$$\langle \delta_\lambda, \varphi \rangle = \int_\lambda \varphi \, ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- ② Seja $v(x) = 1/x, x \neq 0$. Defina

$$\langle VP(1/x), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi}{x} \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

denominada distribuição Valor Principal de $1/x$.

- ③ O funcional $\varphi \in D(\Omega) \mapsto \varphi'(0) \in \mathbb{R}$, conhecido como doublet ou dipole distribution.



Definição 3.8.

Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. A *derivada* de ordem α de T é a distribuição $D^\alpha T$ definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemplo 3.9.

- a Se $u \in C^1(\Omega)$ então a derivada no sentido das distribuições coincide com a derivada no sentido clássico.
- b Se $\Omega = (-1, 1)$ então a função $u(x) = \chi_{(0,1)}$ é localmente integrável, com derivada clássica $u' = 0$, exceto em $x = 0$, mas $Du = \delta_0$ no sentido das distribuições.



Definição 3.10.

Dados $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$, dizemos que $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a *derivada fraca* de u quando $D^\alpha u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, isto é, quando existe $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposição 3.11.

Se f é absolutamente contínua em $[a, b]$, então f é derivável q.s. em $[a, b]$ e as derivadas clássicas e distribucional coincidem.

Proposição 3.12.

Se $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, então $D^\alpha T_n \rightarrow D^\alpha T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, para qualquer multi-índice α . Em outras palavras, o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ é linear e contínuo.



Definição 3.13.

Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\psi \in C^\infty(\Omega)$. O *produto* ψT por:

$$\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

define uma distribuição sobre Ω .



Exercício 3.2.

Prove a fórmula de Leibniz para distribuições: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Se $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então

$$D^\alpha(\psi T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \psi D^{\alpha - \beta} T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

Definição 4.1.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $k \geq 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq +\infty$. O Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial normado definido por

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\},$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & \text{se } p \in [1, +\infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

Notações

- 1 Note que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e $\|u\|_{0,p,\Omega} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$ que denotaremos simplesmente por $\|u\|_{p,\Omega}$.
- 2 Quando não houver perigo de confusão omitiremos Ω na notação da norma.
- 3 Se $p = 2$, escrevemos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.



Exercício 4.1.

Mostre que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial normado e que $\|u\|_{k,p,\Omega}$ é equivalente à norma

$$\|u\| = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$



Exemplo 4.2.

- a) Sejam $\Omega = (-1, 1)$ e $u(x) = x\chi_{(0,1)}$. Note que $u \in L^1(-1, 1)$, $u' \in L^1(-1, 1)$ no sentido clássico, mas $Du = \delta_0 \notin L^1(-1, 1)$ (não possui derivada fraca), portanto $u \notin W^{1,1}(-1, 1)$.
- b) Sejam $\Omega = B(0, 1)$, $\alpha > 0$ e $u(x) = \|x\|^{-\alpha}$, $x \in \Omega$, $x \neq 0$. Mostre que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $0 < \alpha < \frac{N-p}{p}$.



Proposição 4.3.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, e consideremos um inteiro $k \geq 0$ e $p \in [1, +\infty]$. Então $W^{k,p}(\Omega)$ é um **espaço de Banach**. Além disso, temos:

- a) $W^{k,p}(\Omega)$ é **reflexivo**, se $p \neq 1$ e $p \neq +\infty$;
- b) $W^{k,p}(\Omega)$ é **separável**, se $p \neq +\infty$;

Definições a recordar

- 1 Um espaço métrico M é dito **separável** se existir um subconjunto de A de M que seja **enumerável** e **denso**.
- 2 Um espaço normado X é dito **reflexivo** se a imersão canônica

$$J_X : x \in X \longmapsto J_X(x) \in X'', \text{ em que } J_X(x) \in \varphi \in X' \longmapsto \langle J_X(x), \varphi \rangle := \varphi(x) \in \mathbb{R},$$

for uma aplicação **sobrejetora**. Vale lembrar que $\|J_X(x)\|_{X''} = \|x\|_X$.



Resultados Preliminares

- a Um subconjunto A de um espaço métrico separável M , também é um espaço métrico separável com a métrica induzida de M
- b Todo espaço normado reflexivo X é um espaço de Banach. Além disso, todo **subespaço fechado** M de X também é reflexivo.
- c Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, então $L^p(\Omega)$ é separável para todo $p \in [1, +\infty)$, e reflexivo para todo $p \in (1, +\infty)$.

Lema

Sejam X e Y dois espaços de Banach, e suponhamos que exista um **isomorfismo isométrico** $T : X \longrightarrow Y$. Então são válidas as seguintes propriedades:

- a Se Y for separável, então X também será;
- b Se Y for reflexivo, então X também será.



Lema 4.4.

Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq +\infty$. A aplicação

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \longmapsto (u, \partial_1 u, \dots, \partial_N u) \in L^p(\Omega)^{N+1}$$

é uma *isometria*, onde estamos munindo o espaço $L^p(\Omega)^{N+1}$ com a norma

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^{N+1} \|v_i\|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p}$$



Como vimos na Proposição 2.12, $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas isto não é verdade para $W^{k,p}(\Omega)$. Por essa razão, define-se o espaço

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^k(\Omega)$ no lugar de $W_0^{k,2}(\Omega)$.



Exercício 4.2.

Sejam $1 < p < +\infty$, Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Mostre que $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, onde $\tilde{u}$ é a extensão de u a zero, fora de Ω . Além disso,

$$\partial_i \tilde{u} = \widetilde{\partial_i u}, \quad i = 1, \dots, N.$$



Proposição 4.5.

Sejam $1 \leq p < +\infty$ e $k \geq 0$ um inteiro. Então $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N) = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 4.6.

Sejam $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$. Então

$$\rho * v \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \text{ e } \partial_i(\rho * v) = \rho * \partial_i v, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$



Aproximação por Funções Suaves

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $\varepsilon > 0$, defina $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Dado $u \in L^p(\Omega)$ denotemos por $\tilde{u}$ a extensão a zero de u . Se $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, defina

$$\rho * u(x) = \rho * \tilde{u}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Proposição 4.7.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < +\infty$, e seja (ρ_n) uma sequência regularizante. Então,

- ① $u_n = \rho_n * u \in C^\infty(\Omega)$ e $D^\alpha u_n = D^\alpha \rho_n * u$ em Ω , para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, $|\alpha| \leq k$.
- ② $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$.
- ③ Dado $\varepsilon > 0$, $D^\alpha u_n = \rho_n * D^\alpha u$ em Ω_ε , para n suficientemente grande, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $|\alpha| \leq k$.



Teorema 4.8 (Friedrichs).

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < +\infty$. Então, existe uma sequência (v_n) em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$v_n \rightarrow u \text{ em } L^p(\Omega);$$

$$D^\alpha v_n \rightarrow D^\alpha u, \text{ em } L^p(\Omega') \text{ para todo } \Omega' \subset\subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq k.$$



Proposição 4.9 (Regra da Cadeia).

Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\partial_i(G \circ u) = (G' \circ u)\partial_i u, \quad 1 \leq i \leq N.$$



Teorema 4.10 (Meyers-Serrin¹).

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e *limitado* e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < +\infty$. Então

$$C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \text{ é denso em } W^{k,p}(\Omega),$$

isto é, existe uma sequência de funções (u_n) em $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$



¹N. Meyers and J. Serrin, $H=W$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **51** (1964), 1055 – 1056.
doi:10.1073/pnas.51.6.1055



Observação 4.11.

Nenhum desses casos se estendem para $p = \infty$. Vejamos um exemplo simples. Considere $\Omega = (-1, 1)$ e $u(x) = x\chi_{(0,1)}$. Então $u \in W^{1,+\infty}(\Omega)$ mas não pode ser aproximado por funções suaves.

Proposição 4.12.

Sejam $1 \leq p < +\infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Se u tem suporte compacto, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.



Definição 4.13.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Um **operador prolongamento** P para $W^{1,p}(\Omega)$ é um operador linear limitado

$$P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

tal que $Pu|_{\Omega} = u$ para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Seja $x \in \mathbb{R}^N$, vamos escrever $x = (x', x_N)$, onde $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ e

$$\mathbb{R}_+^N = \{x \in \mathbb{R}^N; x_N > 0\},$$

$$Q_r = \{(x', x_N); \|x'\| < r \text{ e } |x_N| < r\},$$

$$Q_r^+ = Q_r \cap \mathbb{R}_+^N,$$

$$Q_r^0 = \{x \in Q_r; x_N = 0\},$$

$$Q_r^- = \{x \in Q_r; x_N < 0\}.$$



Definição 4.14.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Dizemos que $\partial\Omega$ é de classe C^k ($k \geq 1$ inteiro) se para cada $x \in \partial\Omega$, existem $r > 0$, uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^N$ e uma aplicação $\varphi : Q_r \rightarrow U$ tal que

- 1 φ é uma bijeção.
- 2 $\varphi \in C^k(\overline{Q_r})$, $\varphi^{-1} \in C^k(\overline{U})$.
- 3 $\varphi(Q_r^+) = U \cap \Omega$, $\varphi(Q_r^0) = U \cap \partial\Omega$.

Dizemos que o par (U, φ) é chamada uma carta local de $\partial\Omega$.

Observação 4.15.

Cabe ressaltar que, por φ ser um difeomorfismo, podemos trocar Q_r por qualquer aberto de $\mathbb{R}^N$.



Teorema 4.16.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *aberto com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e limitada* ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Então, dado $p \in [1, +\infty]$ existe um operador prolongamento $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Se, além disso, Ω *for limitado*, então dado um *aberto limitado* $\Omega' \supset \supset \Omega$, tem-se que

$$\text{supp}(Pu) \subset \Omega', \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Observação 4.17.

Um exemplo de aberto *ilimitado*, com fronteira de classe C^1 limitada, é $\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)$.



Corolário 4.18.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto *com fronteira de classe C^1 limitada*. Então o subespaço de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ formado pelas restrições em Ω é um subespaço denso de $W^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Precisamente, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n|_{\Omega} \longrightarrow u \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$, sempre que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto *com fronteira limitada de classe C^1* .



Prova do Teorema do Prolongamento: Método de reflexão

Dado $u : Q_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, denote $u^* : Q \longrightarrow$ a extensão por reflexão de u , isto é,

$$u^*(x', x^N) = \begin{cases} u(x', x^N), & x^N > 0, \\ u(x', -x^N), & x^N < 0. \end{cases}$$

Lema 4.19.

Seja $u \in W^{1,p}(Q_+)$ (ou $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$), com $1 \leq p \leq +\infty$. Então $u^* \in W^{1,p}(Q)$ (ou $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$) e

$$\|u^*\|_{p,Q} \leq 2\|u\|_{p,Q_+} \text{ e } \|u^*\|_{1,p,Q} \leq 2\|u\|_{1,p,Q_+}.$$

Em particular, $P : u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N) \longmapsto u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, define um operador prolongamento.



Teorema 4.20 (Caso $\Omega = \mathbb{R}_+^N$).

Existe um operador linear contínuo $\gamma_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^{d-1})$, denominado *operador traço*, tal que se $u \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^N})$, então $\gamma_0(u) = u|_{\mathbb{R}^{d-1}}$.

Teorema 4.21.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *aberto limitado com fronteira de classe C^1* . Então existe um operador linear contínuo $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$, denominado *operador traço*, satisfazendo: Se $u \in C^0(\overline{\Omega})$, então $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$.



Teorema 4.22 (Fórmula de Integração por Partes).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *aberto limitado com fronteira de classe C^1* . Então,

$$\int_{\Omega} u \partial_i v \, dx = - \int_{\Omega} \partial_i u \, v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u) \gamma_0(v) \nu^i \, dS(x),$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $v \in W^{1,p'}(\Omega)$, onde ν^i é a i -ésima coordenada do vetor normal ν apontando para fora de Ω .

Teorema 4.23.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *aberto limitado de classe C^1* ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Então

$$\ker(\gamma_0) = W_0^{1,p}(\Omega).$$



Teorema do Traço Geral caso $p = 2$

Teorema 4.24.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *aberto limitado com fronteira de classe C^1* . Então existe um operador linear e contínuo $\gamma : H^k(\Omega) \longrightarrow (L^2(\Omega))^k$, denominado *operador traço*, onde $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1})$, satisfazendo

- 1 Se $u \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$, então $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$ e $\gamma_i(u) = \partial_i u|_{\partial\Omega}$, $i = 1, \dots, k-1$.
- 2 $\ker(\gamma) = H_0^k(\Omega)$.



Definição 5.1.

Sejam E e F espaços vetoriais normados. Dizemos que E está *imerso continuamente* em F , quando existe uma aplicação linear *injetora* $T : E \longrightarrow F$, que também é contínua, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|T(u)\|_F \leq C\|u\|_E.$$

No caso particular das imersões de Sobolev, T será sempre a *inclusão* entre um mesmo espaço vetorial X com normas diferentes, isto é $E = (X, \|\cdot\|_E)$ e $F = (X, \|\cdot\|_F)$, a qual é sempre injetora, bastando verificar apenas que

$$\|u\|_F \leq C\|u\|_E.$$

Neste caso, esta imersão será denotada por $E \hookrightarrow F$.



Pergunta

Existe algum espaço X para o qual temos automaticamente que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow X$?

A resposta é sim! Mas o espaço X depende de quando:

$$1 \leq p < N,$$

$$p = N,$$

$$N < p \leq \infty.$$



Caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < N$

Começemos pelo caso $1 \leq p < N$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$. Neste caso, veremos que

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),$$

para algum q .

Argumento de Reescala

A fim de encontrarmos um candidato à q , tome $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e defina

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$

Suponha que

$$\|u_\lambda\|_{q,\mathbb{R}^N} \leq C \|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N}.$$



Expoente conjugado de Sobolev

Definimos o **expoente conjugado de Sobolev** de $p \in [1, N)$ por

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Note que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad \text{e} \quad p^* > p.$$



Teorema 5.2 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev).

Se $1 \leq p < N$, então $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e existe uma constante $C = C_{p,N} > 0$ tal que

$$\|u\|_{p^*, \mathbb{R}^N} \leq C \|\nabla u\|_{p, \mathbb{R}^N}$$

Passos da Prova

- 1 Provar para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.
 - Caso $p = 1$: TFC + Desigualdade de Hölder + integrações sucessivas.
 - Caso $p > 1$: Aplicar caso anterior para $v = |u|^\gamma$, com $\gamma = \frac{p(N-1)}{N-p}$.
- 2 Usar a densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$



Corolário 5.3.

Se $1 \leq p < N$, então

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [p, p^*].$$

Desigualdade de Interpolação para normas L^p [Evans, Appendix B.2(h)]

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$ e

$$\|u\|_{r,\Omega} \leq \|u\|_{p,\Omega}^\theta \|u\|_{q,\Omega}^{1-\theta},$$

onde

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{(1-\theta)}{q}$$



Caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $p = N$

Corolário 5.4.

Se $p = N$, então

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [N, +\infty).$$

Usaremos a seguinte desigualdade obtida na prova do Teorema (5.2):

$\forall \gamma > 1$, temos que

$$\|u\|_{\frac{\gamma N}{N-1}} \leq \gamma \|u\|_{p'(\gamma-1)}^{\frac{1}{\gamma}} \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$



Teorema 5.5 (Desigualdade de Morrey).

Se $p > N$, então existe $C = C_{p,N} > 0$ tal que para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ vale

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \|\nabla u\|_{1,p,\mathbb{R}^N} \text{ q.t.p } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

onde $\gamma := 1 - N/p$. Consequentemente,

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^N} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

o que significa que

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N).$$



Teorema 5.6 (Imersão de Sobolev Geral).

Para todo $k \geq 1$ e $p \in [1, +\infty]$

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ com } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}, \quad \text{se } kp < N,$$

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [p, +\infty), \quad \text{se } kp = N,$$

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{m,\gamma}(\mathbb{R}^N), \quad \text{se } kp > N,$$

onde

$$\begin{cases} m := k - \frac{N}{p} \text{ e } 0 < \gamma < 1, & \text{se } k - \frac{N}{p} \text{ é inteiro,} \\ m := \left\lfloor k - \frac{N}{p} \right\rfloor \text{ e } \gamma = \text{frac} \left(k - \frac{N}{p} \right), & \text{se } k - \frac{N}{p} \text{ não é inteiro,} \end{cases}$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ é a parte inteira de um número e $\text{frac}(\cdot)$ é a sua parte fracionária, isto é, $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$. A constante de imersão depende apenas de k, p e N .



Exercício 5.1.

Provar este resultado. Basta aplicar os resultados anteriores indutivamente. Ver [Evans].

Exemplo 5.7.

- ❶ $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$. Por isso as funções de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ são chamadas de Lipschitzianas.
- ❷ $W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, para todo $p > 1$.
- ❸ $W^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R})$, para todo $q \geq 1$.
- ❹ $H^k(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^N)$ para $2k > N$.
- ❺ Se $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ para todo $k > 0$, então $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.



Teorema 5.8.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, com fronteira limitada C^1 ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Para todo $k \geq 1$ e $p \in [1, +\infty]$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ com } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}, \quad \text{se } kp < N,$$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, +\infty), \quad \text{se } kp = N,$$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\gamma}(\Omega), \quad \text{se } kp > N,$$

onde

$$\begin{cases} m := k - \frac{N}{p} \text{ e } 0 < \gamma < 1, & \text{se } k - \frac{N}{p} \text{ é inteiro,} \\ m := \left\lfloor k - \frac{N}{p} \right\rfloor \text{ e } \gamma = \text{frac} \left(k - \frac{N}{p} \right), & \text{se } k - \frac{N}{p} \text{ não é inteiro,} \end{cases}$$

A constante de imersão depende apenas de k, p, N e Ω .

Imersões de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Para $W_0^{1,p}(\Omega)$, valem os mesmos resultados de imersão, com uma condição mais geral para Ω .

Teorema 5.9.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Para todo $k \geq 1$ e $p \in [1, +\infty]$

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ com } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}, \quad \text{se } kp < N,$$

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, +\infty), \quad \text{se } kp = N,$$

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\gamma}(\Omega), \quad \text{se } kp > N,$$

onde

$$\begin{cases} m := k - \frac{N}{p} \text{ e } 0 < \gamma < 1, & \text{se } k - \frac{N}{p} \text{ é inteiro,} \\ m := \left\lfloor k - \frac{N}{p} \right\rfloor \text{ e } \gamma = \text{frac} \left(k - \frac{N}{p} \right), & \text{se } k - \frac{N}{p} \text{ não é inteiro,} \end{cases}$$

A constante de imersão depende apenas de k, p, N e Ω .

Teorema 5.10 (Desigualdade de Poincaré).

Seja Ω um aberto *limitado* de $\mathbb{R}^N$. Então, existe $C = C_{p,\Omega}$ tal que, para todo $p \in [1, N)$, vale

$$\|u\|_{p,\Omega} \leq C \|\nabla u\|_{p,\Omega}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$



Observação 5.11.

- 1 A diferença com a desigualdade de imersão anterior é que temos apenas o gradiente de u aparece no lado direito.
- 2 Não vale para domínios ilimitados. Por exemplo, dado $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\zeta \equiv 1$ em $B(0, 1)$, $0 \leq \zeta \leq 1$ e $\zeta \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(0, 1)$, tome $\zeta_n(x) := \zeta\left(\frac{x}{n}\right)$. Então

$$\|\zeta_n\|_{p, \mathbb{R}^N} \rightarrow +\infty \text{ e } \|\zeta_n\|_{1, p, \mathbb{R}^N} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$



Exercício 5.2.

Leia o Remark 2.3.3 de [Kesavan].



Definição 5.12.

Uma imersão contínua $E \hookrightarrow F$ é dita ser **compacta**, quando todo conjunto limitado em E é **relativamente compacto (ou precompacto)** em F . Em outras palavras, se $\mathcal{B}$ é limitado em E , então o fecho de $\mathcal{B}$ em F é compacto. Neste caso, usaremos a notação $E \xhookrightarrow{c} F$.

Proposição 5.13.

Uma imersão contínua $E \hookrightarrow F$ é dita ser **compacta** se, e somente se, cada sequência limitada $(u_n) \subset E$ possui uma subsequência convergente em F .

Proposição 5.14.

Se $E \hookrightarrow F \xhookrightarrow{c} G$ ou $E \xhookrightarrow{c} F \hookrightarrow G$ e G é completo, então $E \xhookrightarrow{c} G$.



Teorema 5.15 (Ascoli-Arzelà).

Seja K um espaço métrico compacto e $C(K)$ o conjunto das funções contínuas $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma do sup. Se um subconjunto $\mathcal{B}$ de $C(K)$ satisfaz:

- 1 $\mathcal{B}$ é limitado em $C(K)$;
- 2 $\mathcal{B}$ é uniformemente equicontínuo, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{B};$$

então $\mathcal{B}$ é relativamente compacto em $C(K)$.



Critério de Compacidade Forte em L^p

Denotamos a **translação de f por h** por $\tau_h f(x) = f(x + h)$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $h \in \mathbb{R}^N$.

Teorema 5.16 (Fréchet-Kolmogorov).

Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto de $L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p < \infty$. Se

- 1 $\mathcal{F}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^N)$;
- 2 $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h u - u\|_{p, \mathbb{R}^N} = 0$ uniformemente em $\mathcal{F}$, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |h| < \delta \Rightarrow \|\tau_h u - u\|_{p, \mathbb{R}^N} < \varepsilon, \forall u \in \mathcal{F}.$$

Então $\mathcal{F}|_{\Omega}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$, para qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com medida finita.

A prova deste resultado encontra-se em [Brezis, Theorem 4.26].



Teorema 5.17 (Rellich-Kondrachov).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1 . Então as seguintes imersões são compactas:

- ① $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$, se $p < N$,
- ② $W^{1,N}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, se $p = N$,
- ③ $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q < p^*$, se $p > N$,

Lema 5.18.

Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\|\tau_h u - u\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq |h| \|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N}, \forall h \in \mathbb{R}^N.$$



O Espaço $H^{-1}(\Omega)$

Notação

Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o dual topológico do espaço $H_0^1(\Omega)$. Usaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$, ou simplesmente $\langle \cdot, \cdot \rangle$, para denotar o par entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Apesar de $H_0^1(\Omega)$ ser um espaço de Hilbert, não faremos a identificação com seu dual $H^{-1}(\Omega)$. Vamos considerar as seguintes imersões:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

sendo a última dada por:

$$\langle u, v \rangle := (u, v)_{2, \Omega}, \forall u \in L^2(\Omega) \text{ e } \forall v \in H_0^1(\Omega).$$



Teorema 6.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$).

Se $f \in H^{-1}(\Omega)$, então existem $f^0, f^1, \dots, f^N \in L^2(\Omega)$, não unicamente determinados, tais que

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f^0 v \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f^i v_{x_i} \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1)$$

Além disso,

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \min \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \|f^i\|_{2,\Omega}^2 \right)^{1/2} ; f \text{ satisfaz (1) para } f^i, i \in \{1, \dots, N\}. \right\}$$



Equações Elípticas de Segunda Ordem

Desejamos estudar o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado e

- $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função desconhecida;
- $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada;
- L é um operador diferencial parcial de 2ª ordem que possui uma das seguintes formas:



- Forma Divergente

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^N b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

- Forma não divergente

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

onde $a^{ij}, b^i, c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas com $i, j \in \{1, \dots, N\}$.



Consideremos o operador L na forma divergente, com $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega)$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, N\}$, e $f \in L^2(\Omega)$.

Dado $v \in C_c^\infty(\Omega)$, e usando integração por partes, podemos ver que:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^N b^i u_{x_i} v + c u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$



Definição 7.1.

Dados $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega)$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, N\}$, definiremos a forma bilinear $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associada ao operador L na forma divergente, por

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^N b^i u_{x_i} v + cuv \, dx.$$



Definição 7.2.

Sejam $f \in H^{-1}(\Omega)$ e B a forma bilinear associada ao operador L na forma divergente. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma *solução fraca* do problema

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$



Teorema 7.3 (Lax-Milgram).

Seja H um *espaço de Hilbert real*, e suponhamos que $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma *forma bilinear contínua*. Suponhamos também que exista $\beta > 0$ tal que

$$B(u, v) \geq \beta \|u\|^2 \text{ para todo } u \in H. \quad (\text{coercividade})$$

Então, para cada $\varphi \in H'$, existe um único $u_0 \in H$ tal que

$$B(u_0, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H', H}, \text{ para todo } v \in H.$$



Definição 7.4.

Dizemos que o operador diferencial $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é *uniformemente elíptico* se existir $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2,$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.



Observação 7.5.

- a) Daqui em diante, assumiremos a *condição de simetria*, isto é,

$$a^{ij} = a^{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

- b) $Lu = -\Delta u$ é um operador elíptico.

- c) Se L é *uniformemente elíptico*, então, para cada $x \in \Omega$, a matriz

$$A(x) = [a^{ij}(x)]_{i,j=1}^N$$

é *positiva e definida*.



Teorema 7.6 (Estimativas de Energia).

Existem constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

e

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B(u, u) + \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.



Teorema 7.7.

Existe $\gamma \geq 0$ com a seguinte propriedade: dados

$$\mu \in [\gamma, \infty) \text{ e } f \in L^2(\Omega),$$

existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ para o problema

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$



Definição 7.8.

Sejam X e Y dois espaços de Banach. Dizemos que $K \in L(X; Y)$ é um **operador compacto** se $\overline{K(B_X)}$ é um subconjunto compacto de Y , onde

$$B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}.$$

Em outras palavras, quando K é um operador compacto, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ limitada em X , sabemos que $(K(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge em Y .

Proposição 7.9.

Se H é um espaço de Hilbert e $K \in L(H)$ é um operador compacto, então K^* também é.



Funções em Espaços de Banach

Seja $T > 0$ um número real e $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach real. Para uma função $u : [0, T] \rightarrow X$ temos os seguintes conceitos, cujo enunciado preciso podem ser encontrados em [Evans, §E.5],

- u é dita ser **fortemente mensurável** quando é o limite de uma sequência de funções simples em X .
- u é dita ser **somável ou integrável** quando é fortemente mensurável e a função real $t \mapsto \|u(t)\|$ é integrável. Neste caso, a sua integral é um elemento de X e será denotado por:

$$\int_0^T u(t) dt.$$



Teorema 8.1.

Se $u : [0, T] \longrightarrow X$ é integrável, então

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\| \leq \int_0^T \|u(t)\| dt$$

e, para toda $A \in X'$,

$$\left\langle A, \int_0^T u(t) dt \right\rangle_{X'X} = \int_0^T \langle A, u(t) \rangle_{X',X} dt$$



Definição 8.2.

O espaço $L^p(0, T; X)$ consiste das funções $u : [0, T] \rightarrow X$ integráveis tais que $\|u(\cdot)\| \in L^p(0, T)$. Em $L^p(0, T; X)$, definimos a norma:

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|.$$



Exercício 8.1.

Mostre que $L^p(0, T; X)$ é um espaço de Banach.

