



UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

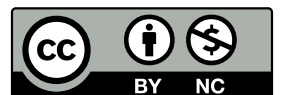
Notas de Cálculo III

Cálculo Diferencial de Várias Variáveis

Prof. Reginaldo Demarque
Departamento de Ciências da Natureza
Universidade Federal Fluminense

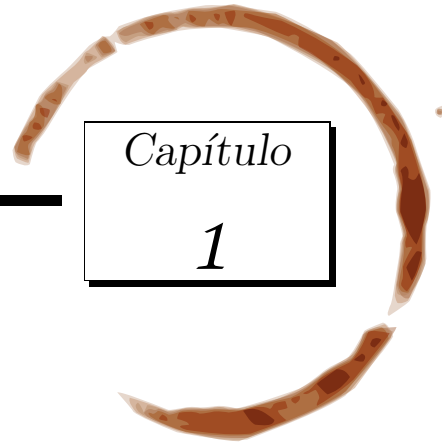
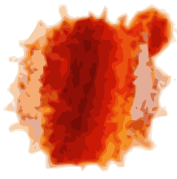
Rio das Ostras, 2026
[Compilado 5 de setembro de 2026, 20:32]

Notas de Cálculo III ©2026 by Reginaldo Demarque tem a licença
CC BY-NC 4.0 . Para ver uma cópia da licença, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.pt>



Sumário

1	Motivação	3
2	Elementos de Geometria Analítica	8
2.1	Retas e Planos	8
	Equação Paramétrica de uma Reta	8
	Equação Cartesiana do Plano no Espaço	10
2.2	Superfícies	12
	Superfícies Cilíndricas	12
	Superfícies Quádricas	13
	Eu vejo quádricas...Todo o tempo!	18
2.3	Coordenadas Polares	21
	Relação entre coordenadas cartesianas e polares	23
	Plotando a Cardioide no Python	25
3	Funções Vetoriais	26
3.1	Funções Vetoriais	26
	Limite e Continuidade	27
	Curvas Parametrizadas	28
	Curvas Parametrizadas no Espaço	31
	Parametrização por inteseção de superfícies	33
	Derivadas	35
	Regras de Derivação	37
	Comprimento de arco	38
3.2	Cálculo Vetorial de Curvas	40
	Parametrização pelo comprimento de arco	40
	Curvatura	43
	Vetores Normal principal e Binormal	46
	Movimento: velocidade e aceleração	47



Capítulo

1

Motivação

Vejamos algumas situações onde os objetos estudados nessa disciplina são usados.

Coordenadas Polares

- Traçar curvas complexas

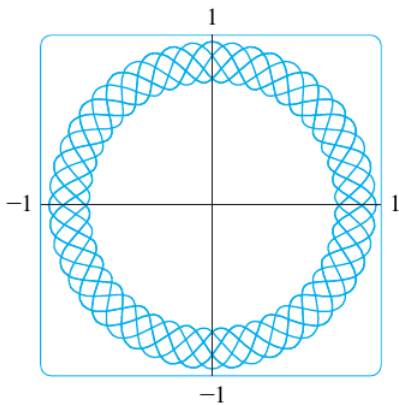


FIGURA 16

$$r = \text{sen}^2(2,4\theta) + \cos^4(2,4\theta)$$

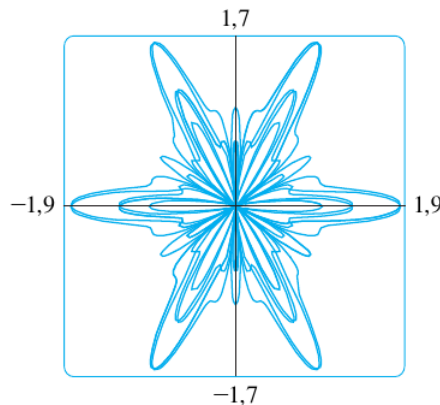


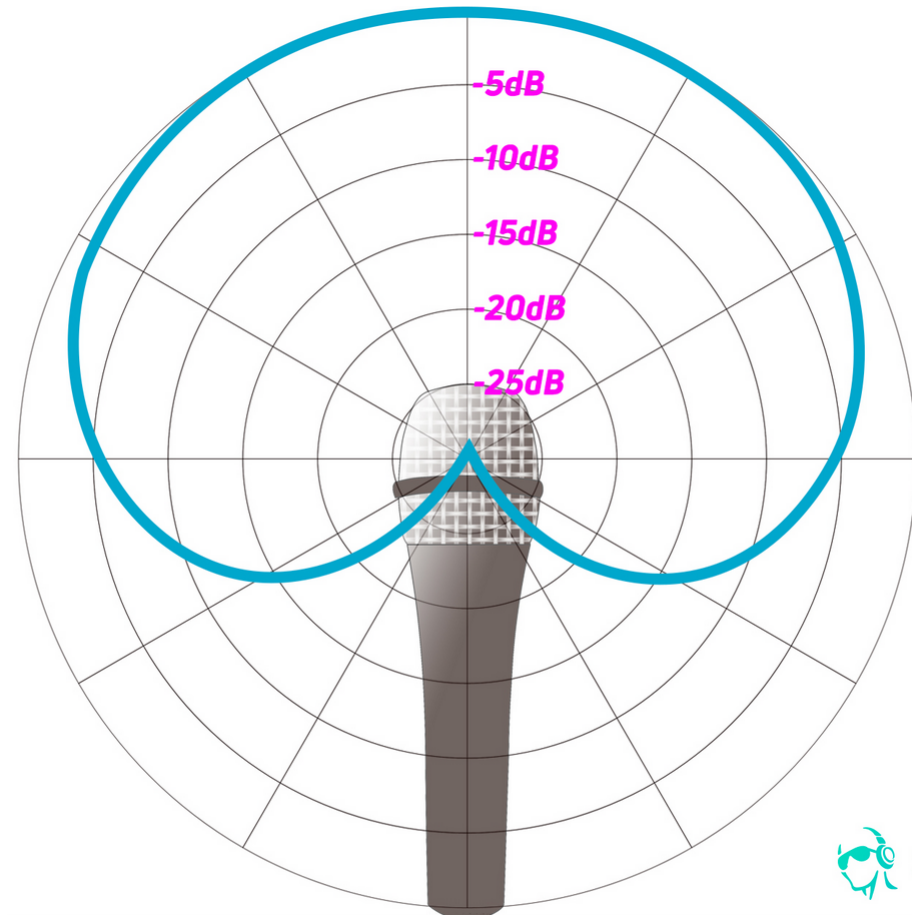
FIGURA 17

$$r = \text{sen}^2(1,2\theta) + \cos^3(6\theta)$$

Figura 1.1:

- Aplicação na engenharia de som

Engenheiros de som usam coordenadas polares para descrever padrões de sons de microfones. Um padrão de captação em forma de **cardioide** captura principalmente a fonte sonora para a qual é apontado, como um cantor ou um instrumento, ao mesmo tempo que reduz a captação de ruído ambiente e sistemas de monitoramento de palco.



Funções Vetoriais

- **Aplicação em Biologia**

Em 1953, James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de **DNA** é de duas hélices circulares paralelas interligadas.



Sabendo-se o raio da hélice de DNA, o número de voltas e a altura de cada volta, usando o conceito de **comprimento de curvas espaciais**, podemos calcular o comprimento da molécula de DNA.

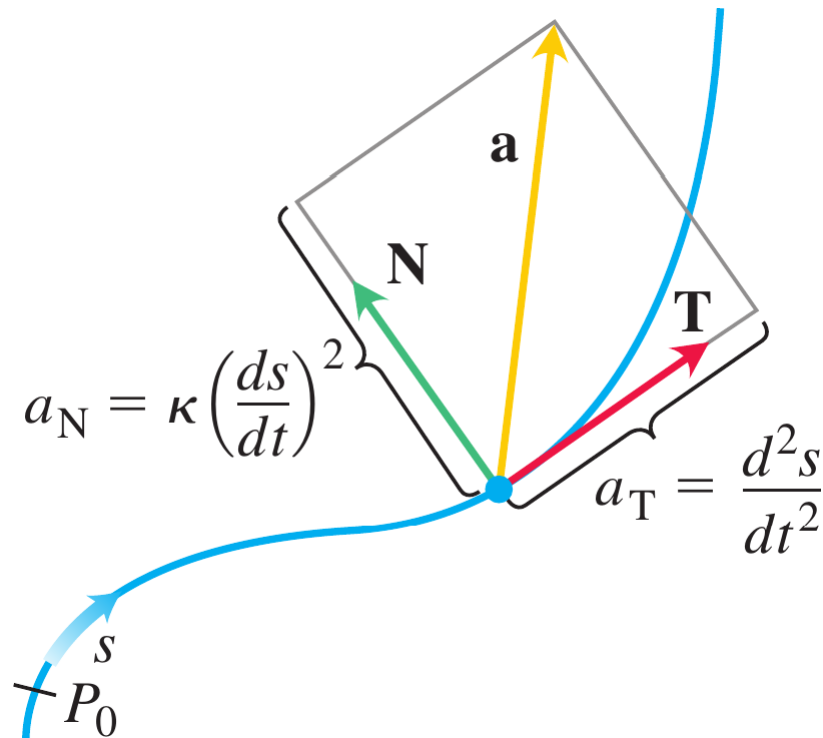
- **Movimentos sobre curvas**

No ensino médio, aprendemos que uma partícula em um **Movimento Circular Uniforme** tem velocidade constante v , mas para manter sua trajetória em um círculo de raio R , precisa de uma **força centrípeta**, que gera a chamada **aceleração centrípeta**, cuja fórmula é:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Contudo, para movimentos em uma curva qualquer, essa aceleração tem uma **forma vetorial**

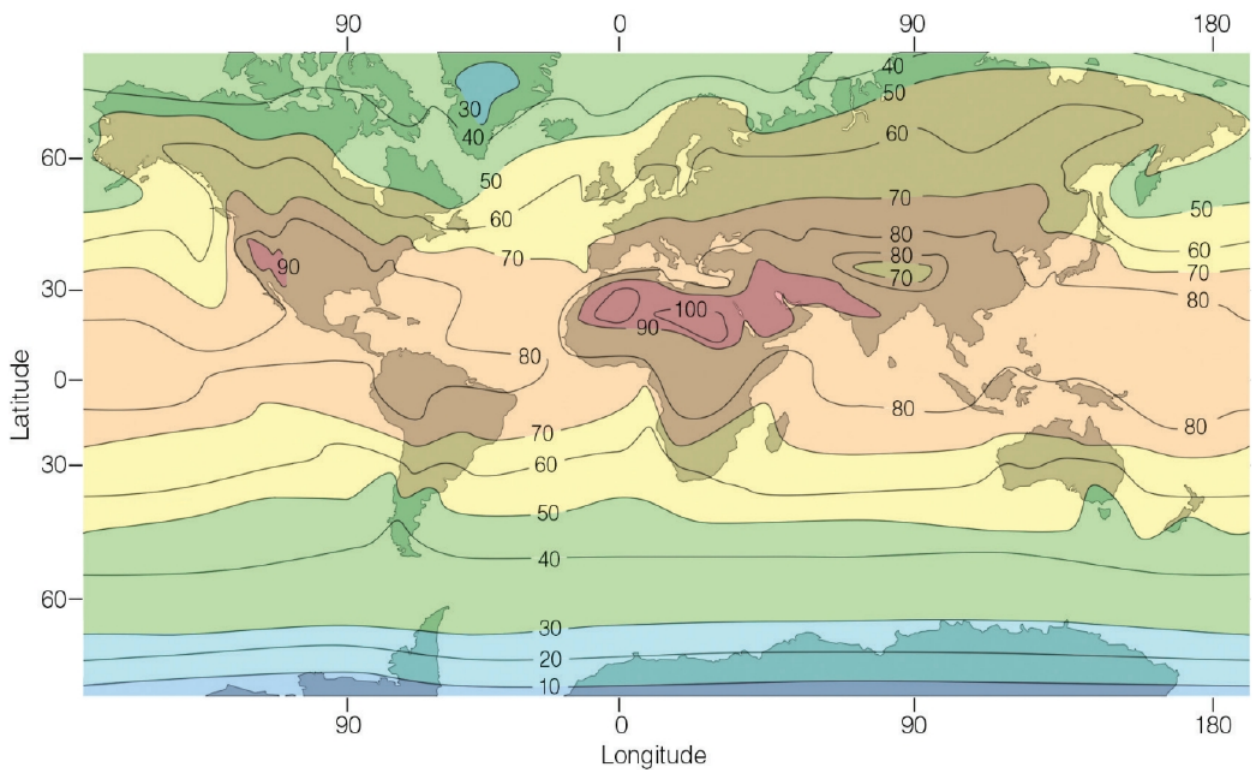
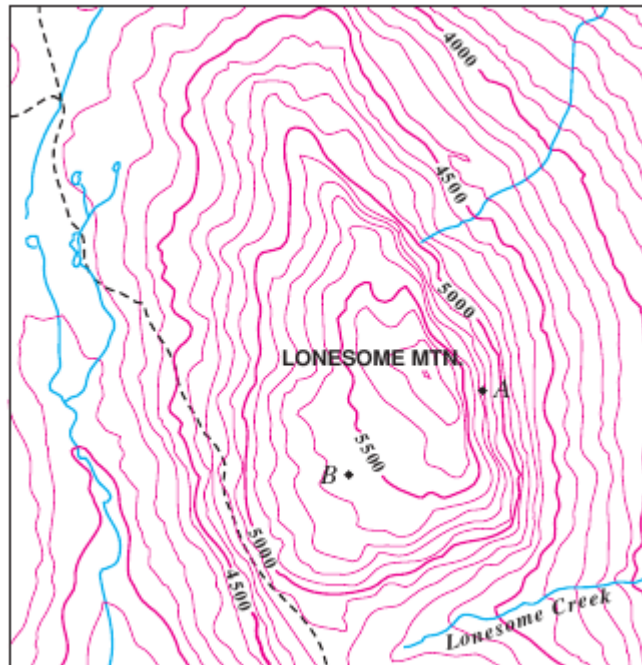
$$\vec{a} = v'\vec{T} + \kappa v^2 \vec{N}$$



Funções de Várias Variáveis

- **Topografia**

As **curvas de nível** de funções de várias variáveis tem como exemplos de aplicações o estudo topográfico ou das isotermas de regiões.



- **Problema de Otimização: Produção restrita a um orçamento**

A produção total P de certo produto depende do **custo x de trabalho empregado** e da **quantidade y de capital investido**. Na década de 1920 Charles Cobb e Paul Douglas obtiveram o seguinte modelo

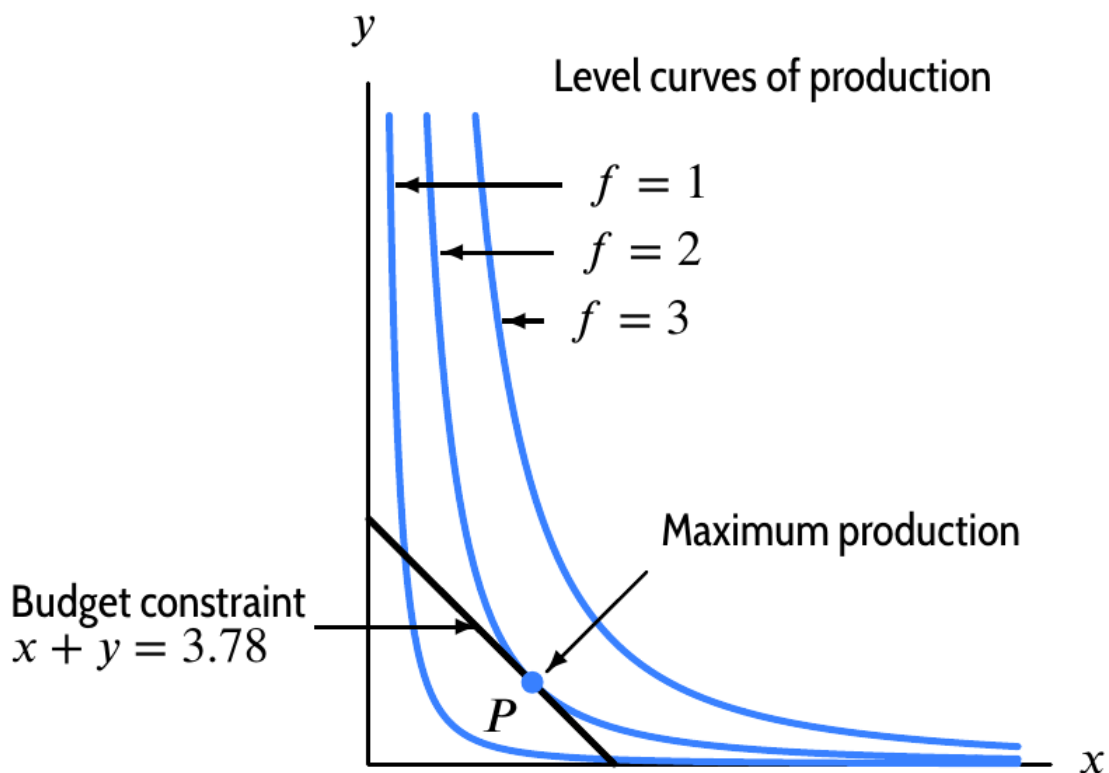
$$P = bx^\alpha y^{1-\alpha},$$

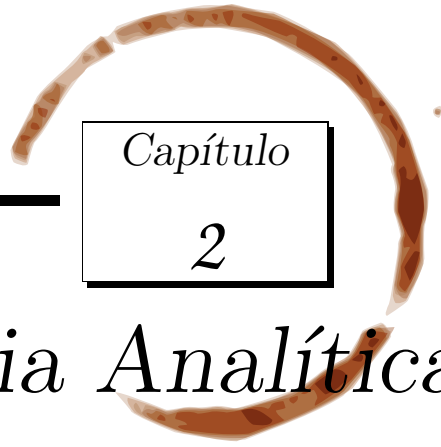
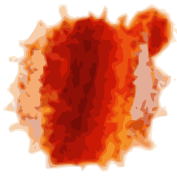
onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$.

Para uma firma com função de produção e restrição orçamentária dadas por

$$\begin{cases} P = x^{2/3}y^{1/3} \\ x + y = 3.78. \end{cases}$$

Teremos produção máxima $P = 2$ quando $x = 2.52$ e $y = 1.26$





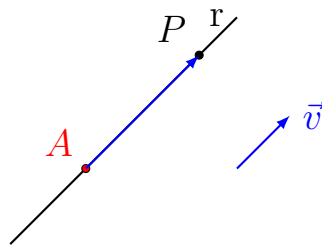
Elementos de Geometria Analítica

2.1 Retas e Planos

Equação Paramétrica de uma Reta

Sabemos que uma reta r pode ser inteiramente descrita por uma [equação vetorial paramétrica](#)

$$P = A + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



onde A é um ponto fixado de r e $\vec{v}$ é um vetor diretor desta reta.

Em coordenadas:

Se $P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (a, b)$

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se $P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas equações são chamadas simplesmente **equações paramétricas da reta** r .

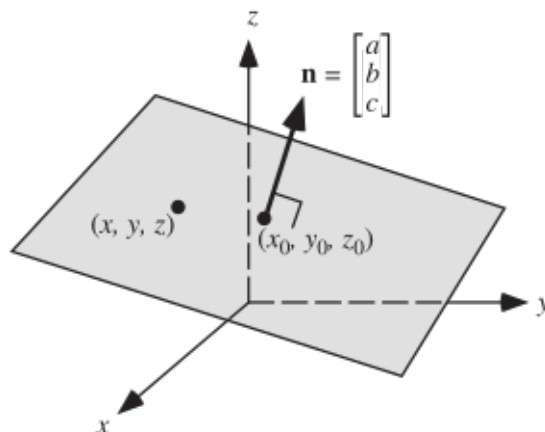
**Exemplo 2.1**

1. Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 2, -2)$ e $B = (-1, 4, 2)$.
2. Sejam $A = (0, 1, 8)$, $B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A .

Equação Cartesiana do Plano no Espaço

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano em $\mathbb{R}^3$, $\vec{n} = (a, b, c) \perp \pi$, então os pontos $P = (x, y, z)$ do plano devem satisfazer a seguinte **equação cartesiana**

$$ax + by + cz + d = 0$$



Exemplo 2.2

Vamos recordar a resolução dos seguintes problemas:

1. Determine a equação do plano que passa por $A = (1, 3, 2)$, $B = (3, -1, 6)$ e $C = (5, 2, 0)$.
2. Determine o ponto da reta

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -4, \\ z = 5 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

que intercepta o plano $4x + 5y - 2z = 18$.

3. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta $r : X = (-1, 1, 2) + t(-1, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

**Para Casa 2.1**

Resolva os exercícios:

1. Determine uma equação para o plano que passa pelos pontos $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 1, 0)$.
2. Determine as equações paramétricas da reta dada pela interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $x - 2y + 3z = 1$.
3. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(1, 0, 6)$ e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$.

2.2 Superfícies

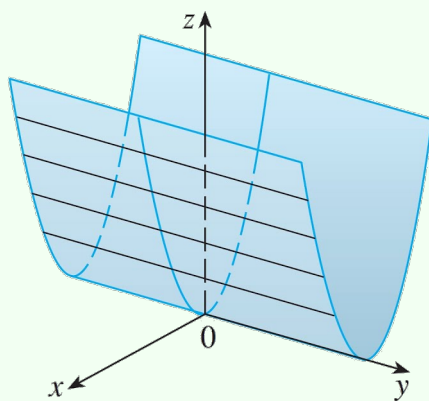
Superfícies Cilíndricas

Uma **superfície cilíndrica** é aquela gerada por uma reta ℓ que se move ao longo de uma curva plana dada, de modo que a reta ℓ sempre esteja paralela a uma reta fixa. A reta ℓ é chamada de **geratriz** e a curva de **diretriz**.



Exemplo 2.3

A equação $z = x^2$ em $\mathbb{R}^3$ representa a seguinte superfície cilíndrica.



Exemplo 2.4

Esboce as superfícies

(a) $y^2 + z^2 = 1$

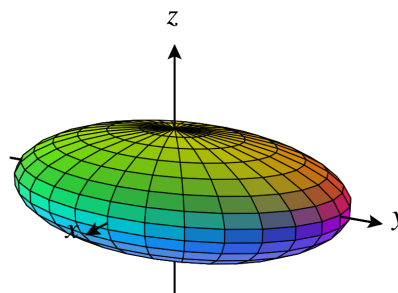
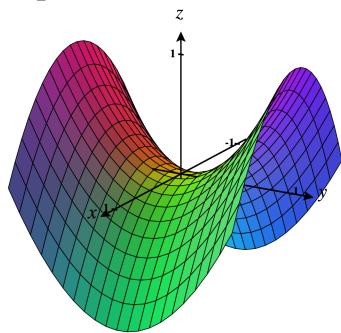
(b) $z = 1 - y^2$

Superfícies Quádricas

Uma **superfície quádrlica** é o gráfico de uma equação do segundo grau a três variáveis, isto é, uma equação da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

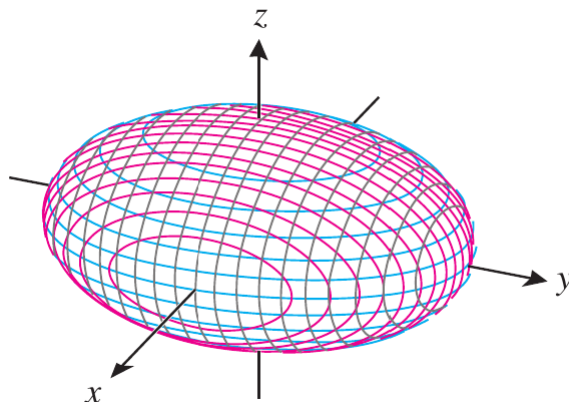
onde pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F é **não nulo**.



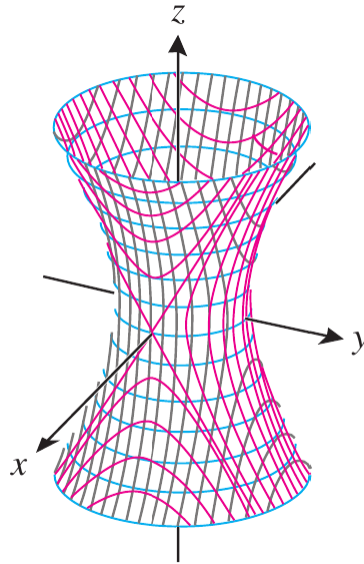
Forma Padrão

Através de uma rotação e uma translação é possível colocar a **superfície quádrlica** em uma das chamadas **formas padrão**.

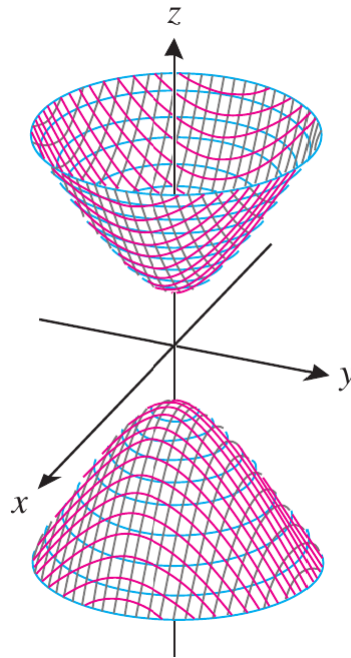
Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



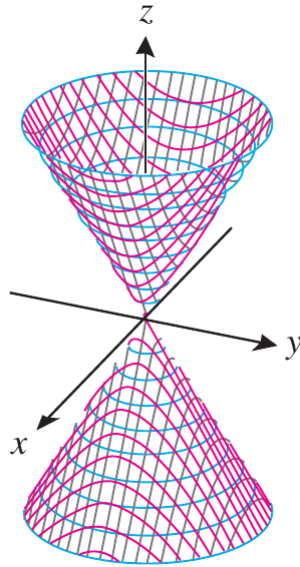
Hiperboloide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



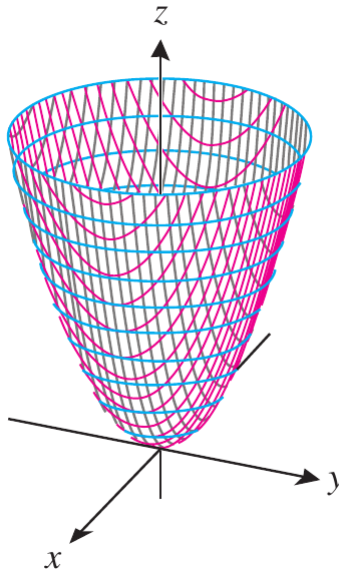
Hiperboloide de duas folha: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



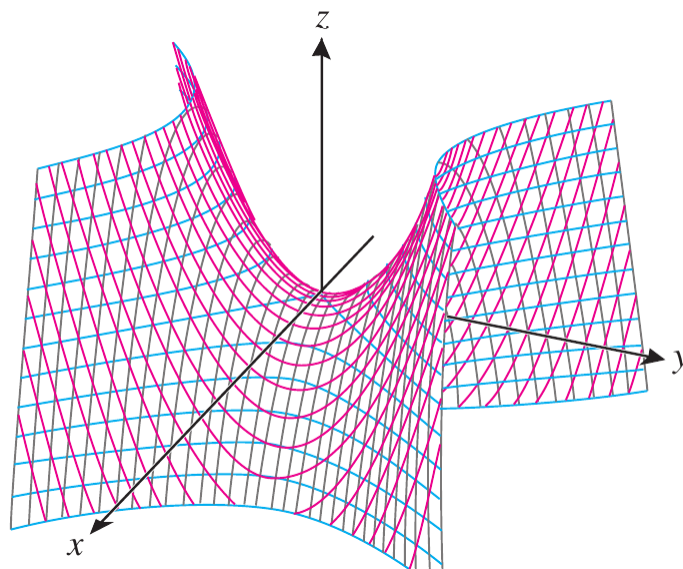
Cone: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



Paraboloide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



Paraboloide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



Resumo

Equação	Característica	Classificação
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	3 termos quadráticos = 1 Sem sinal negativo	Elipsoide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	3 termos quadráticos = 1 1 sinal negativo	Hiperboloide de 1 folha
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	3 termos quadráticos = 1 2 sinais negativo	Hiperboloide de 2 folha
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$	2 termos quadráticos = ao terceiro	Cone
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	1 termo linear = 2 quadráticos com mesmo sinal	Parabolóide Elíptico
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	1 termo linear = 2 quadráticos com sinais opostos	Parabolóide Hiperbólico



Exemplo 2.5

Reconheça e esboce às quádricas

1. $z = 4x^2 + y^2$

2. $z = y^2 - x^2$

3. $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$



Exemplo 2.6

Associe as equações às respectivas quádricas.

1. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

5. $x = y^2 - z^2$

9. $x = z^2 - y^2$

2. $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$

6. $x = -y^2 - z^2$

10. $z = -4x^2 - y^2$

3. $9y^2 + z^2 = 16$

7. $x^2 + 2z^2 = 8$

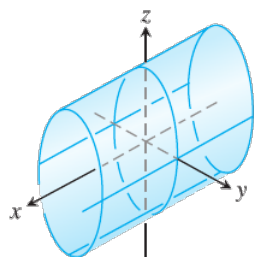
11. $x^2 + 4z^2 = y^2$

4. $y^2 + z^2 = x^2$

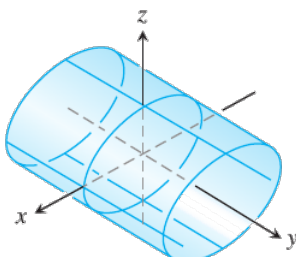
8. $z^2 + x^2 - y^2 = 1$

12. $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$

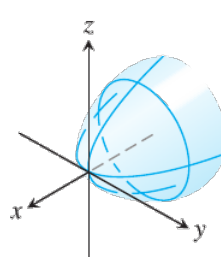
a.



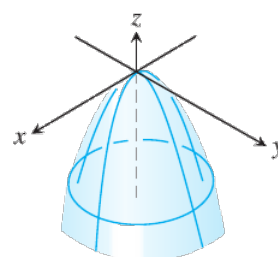
b.



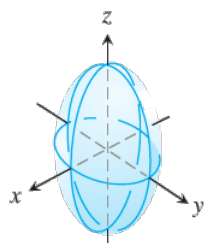
e.



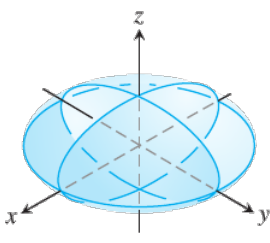
f.



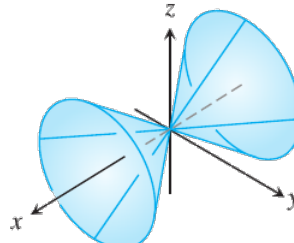
c.



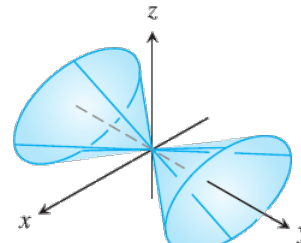
d.



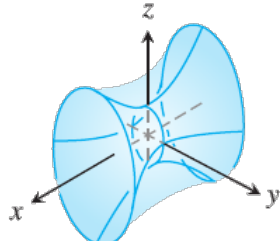
g.



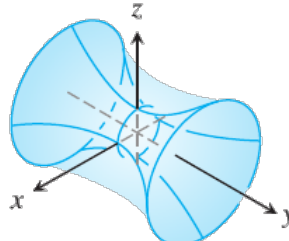
h.



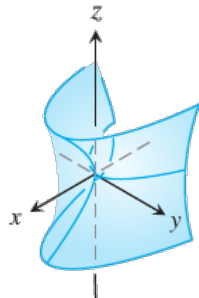
i.



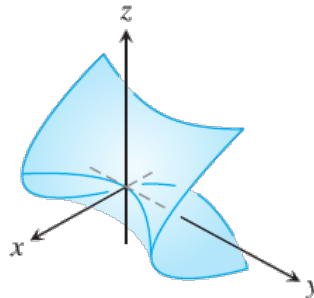
j.



k.



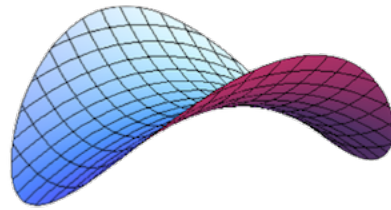
l.



Eu vejo quádricas...Todo o tempo!



Batata Pringles



Aplicações na Engenharia



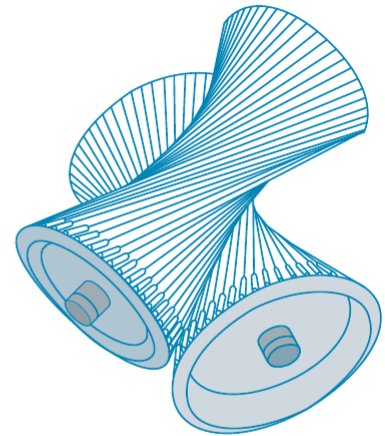
David Frazier/Corbis

Uma antena parabólica reflete sinais para o foco de um paraboloide.



Mark C. Burnett/Photo Researchers, Inc

Reatores nucleares têm torres de arrefecimento com a forma de hiperboloides.

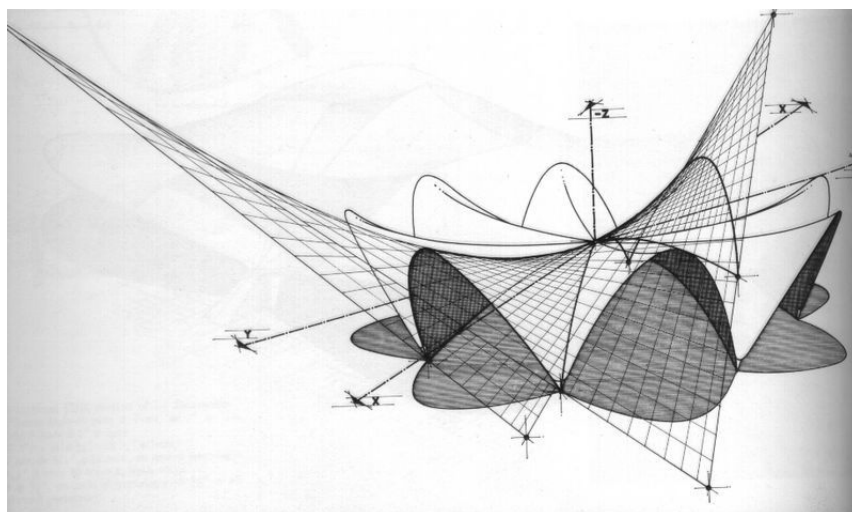


Hiperboloides produzem transmissão por engrenagens.

Aplicações na Arquitetura



Restaurante Los Manantiales – Félix Candela (México)



Trata-se de quatro paraboloides hiperbólicos idênticos construídos em concreto armado, rotacionados e interseccionados em seu centro.



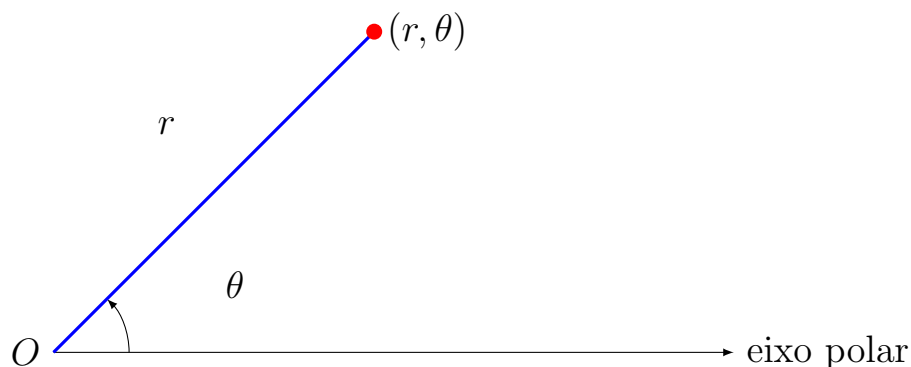
Vila Velha, praia da costa, ES

2.3 Coordenadas Polares

Um sistema de **coordenadas polares** é estabelecido da seguinte forma:

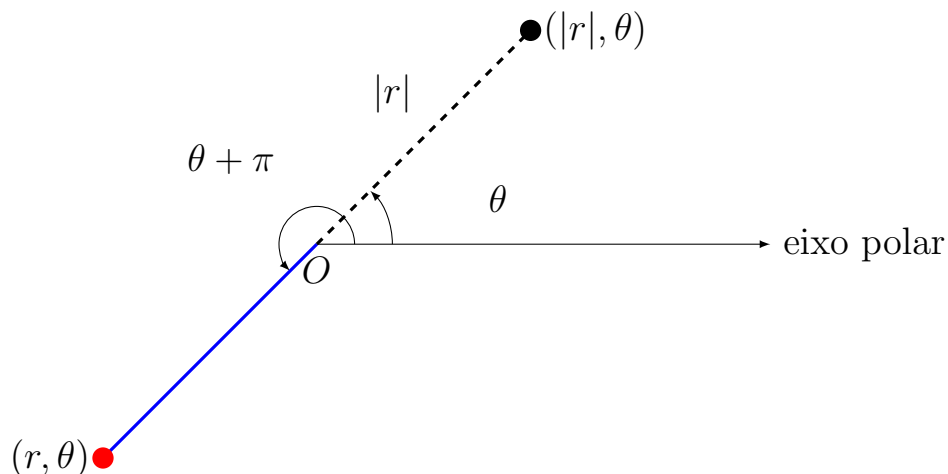
1. Fixamos um ponto no plano, conhecido como **polo** (ou origem), denotado por O .
2. Fixamos uma semi-reta a partir de O , chamada **eixo polar**.

As **coordenadas polares** de ponto P do plano são formadas por um par ordenado (r, θ) , sendo r a distância de P a O e θ o ângulo entre o eixo polar e a reta OP .



Convenções

- Um ângulo é **positivo** se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e **negativo** se for medido no sentido horário.
- $(0, \theta)$ representa o **polo** para qualquer valor de θ .
- Se $r < 0$, a coordenada (r, θ) corresponde ao simétrico, em relação à origem, do ponto $(|r|, \theta)$.



**Exemplo 2.7**

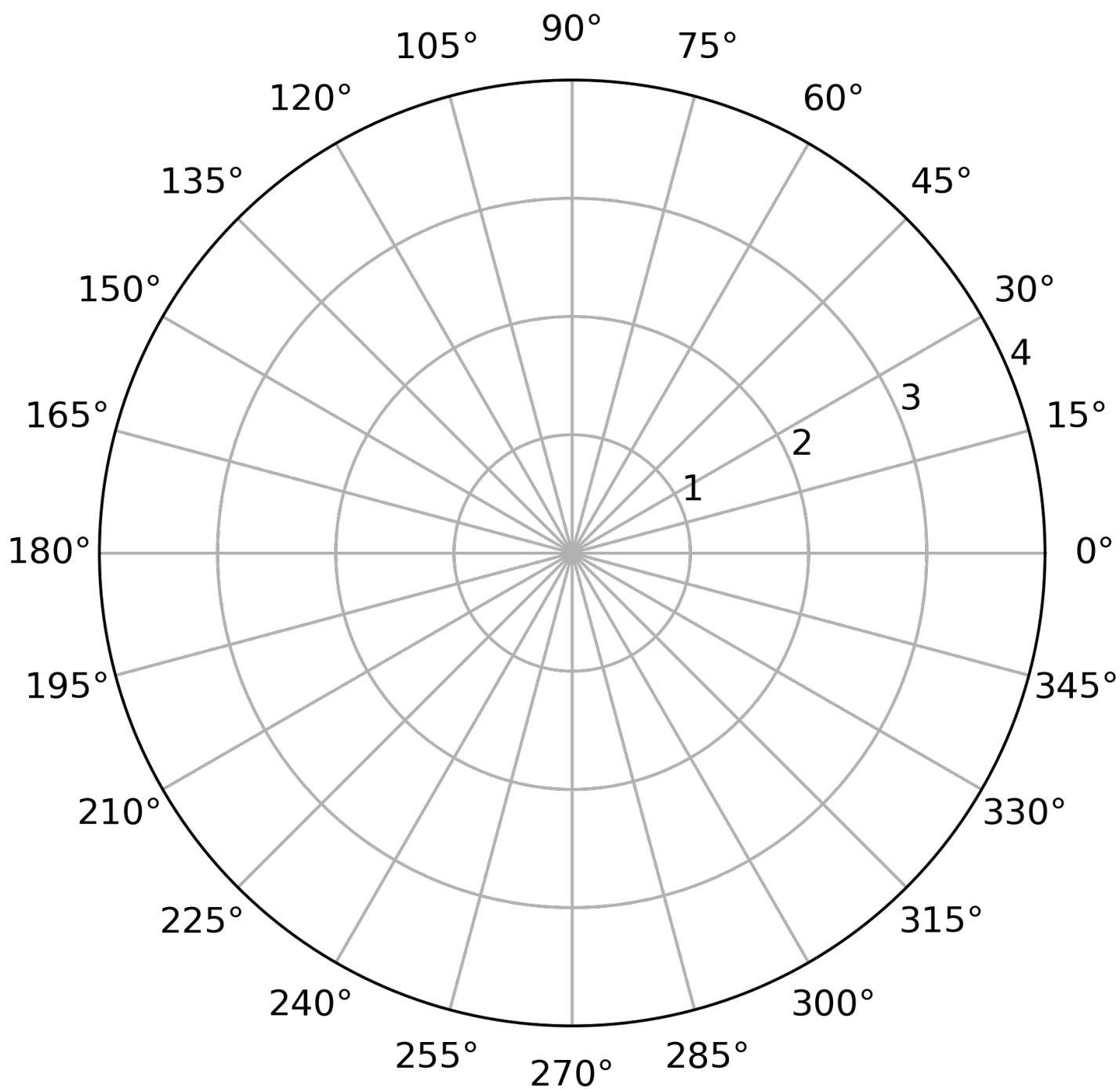
Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas

(a) $(1, 5\pi/4)$

(b) $(2, 3\pi)$

(c) $(2, -2\pi/3)$

(d) $(-3, 3\pi/4)$



Para produzir aquela malha em python, basta usar o seguinte código

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

ax = plt.axes(projection='polar')
angulos=list(range(0, 360, 15))
raios = [1, 2, 3, 4]

# plota os pontos
plt.polar(5*np.pi/4,1, 'g.')
plt.polar(3*np.pi,2, 'b.')
plt.polar(-2*np.pi/3,2, 'k.')
plt.polar(3*np.pi/4,3, 'r.')
plt.polar(3*np.pi/4+np.pi,3, 'r.')

ax.set_thetagrids(angulos)
ax.set_rgrids(raios)
plt.show()
```

Relação entre coordenadas cartesianas e polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

O **gráfico de uma equação polar** consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação (r, θ) cujas coordenadas satisfaçam a equação.



Exemplo 2.8

Esboce a curva que é representada pelas equações polares abaixo.

(a) $r = 2$

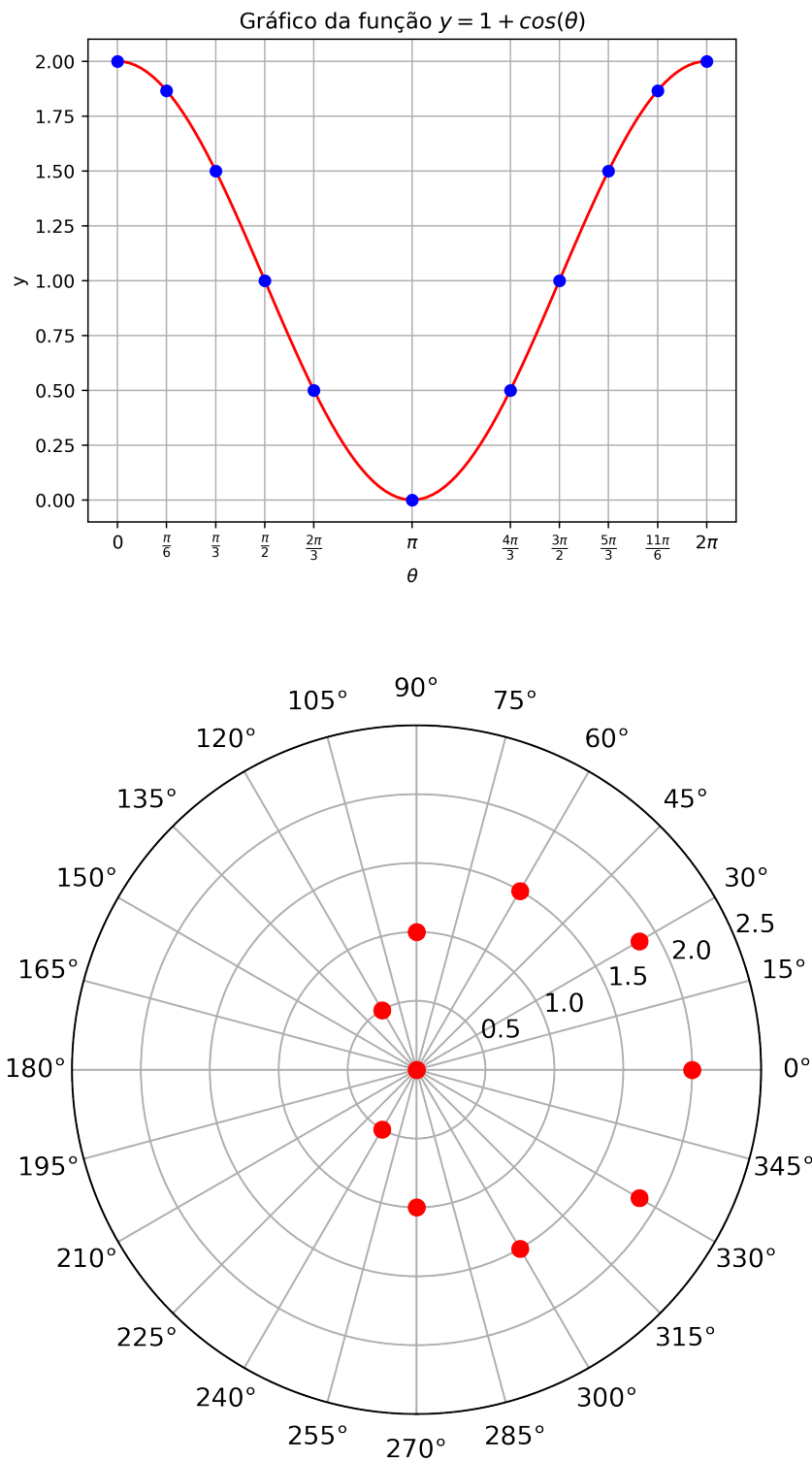
(b) $\theta = 1$



Exemplo 2.9

Esboce a curva que é representada pela seguinte equação polar

$$r = 1 + \cos(\theta) \text{ (cardioide)}$$



Plotando a Cardioide no Python

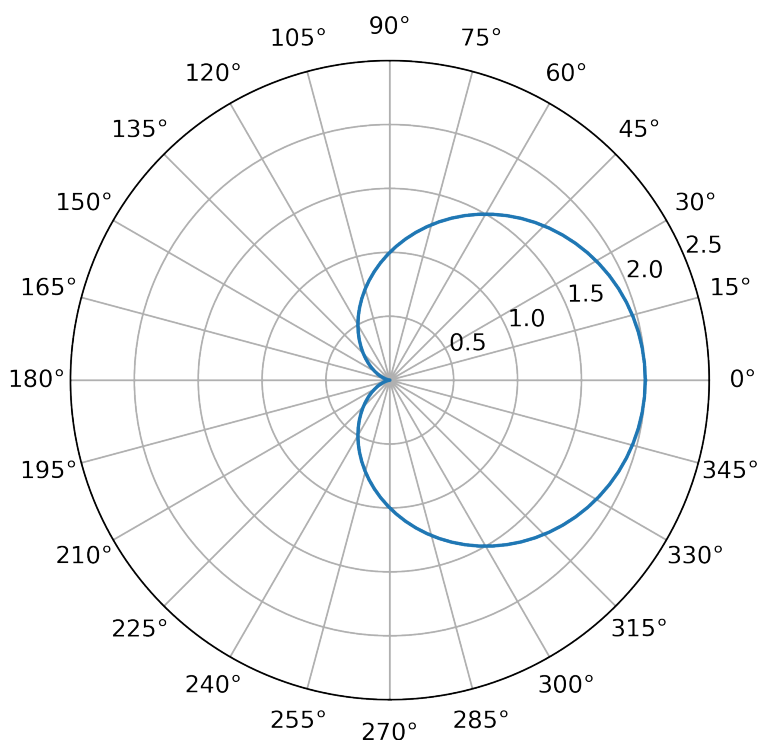
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

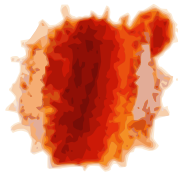
ax = plt.axes(projection='polar')

#plotar o gráfico
theta= np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
r=1+np.cos(theta)
plt.polar(theta, r)

#construir a malha
raios = [0.5,1,1.5,2,2.5]
angulos=list(range(0, 360, 15))
ax.set_thetagrids(angulos)
ax.set_rgrids(raios)

plt.show()
```





Funções Vetoriais

3.1 Funções Vetoriais

Definição 3.1

Uma **função vetorial** é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$, denotada por:

$$\begin{aligned}\vec{r}: D \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \vec{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).\end{aligned}$$

As funções $f_1, \dots, f_n$ são chamadas **funções componentes**.



Exemplo 3.2

1. $\vec{r}(t) = (t, t), t \in \mathbb{R}.$
2. $\vec{r}(t) = (t, 1, 0), t \geq 0.$

Limite e Continuidade

Definição 3.3

Sejam $\vec{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ uma função vetorial com domínio D . Definimos o **limite de $\vec{r}(t)$ quando t tende a $a \in D$** por

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow a} f_n(t) \right),$$

desde que o limite das funções componentes existam.



Exemplo 3.4

Determine $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$, onde $\vec{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t})$.

Definição 3.5

Uma função vetorial $\vec{r}$ é **contínua em a** se $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$.

Em vista desta definição, uma função $\vec{r}$ é **contínua em a** se, e somente se, cada uma de suas **componentes é contínua em a** .

Curvas Parametrizadas

Quando uma função vetorial $\vec{r}(t) = (f(t), g(t))$, está definida em um intervalo I da reta e é **contínua**, então o conjunto C de todos os pontos (x, y) do plano tais que

$$x = f(t) \text{ e } y = g(t) \quad (3.1)$$

quando t varia formam uma **curva no plano**. As equações em (3.1) são ditas **equações paramétricas de C** , $\vec{r}$ é dita ser uma **parametrização de C** e t é chamado de **Parâmetro**.



Exemplo 3.6

Determine as curvas parametrizadas por:

1. $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. $\vec{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Parametrização do Gráfico de uma Função

O gráfico de qualquer função $y = f(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, pode ser parametrizado de forma natural usando a variável x como parâmetro, da seguinte forma:

$$\vec{r}(t) = (t, f(t)), \quad t \in I.$$



Exemplo 3.7

Determine uma parametrização para as curvas:

- (a) A parábola $y = x^2$.
- (b) O gráfico da função $y = \cos(x)$.
- (c) $e^y - x^2 = 1$.
- (d) $x = y^2 + y$

Se em uma equação polar a coordenada r estiver em função de θ , isto é, $r = f(\theta)$, então podemos usar θ como parâmetro e parametrizar a curva representada pela equação polar da seguinte forma:

$$\vec{\alpha}(\theta) = f(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$$



Exemplo 3.8

Determine uma parametrização para a cardioide $r = 1 + \cos \theta$



Para Casa 3.1

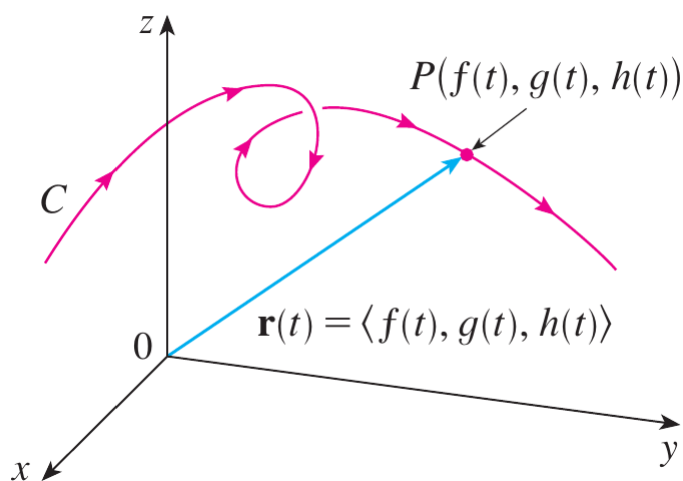
1. Determine uma parametrização para o segmento de reta que entre os pontos $(1, 0)$ e $(2, 5)$.
2. Determine a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (2 \cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
3. Esboce a curva que é representada pelas equações polares abaixo.
 - (a) $r = 2 \cos \theta$
 - (b) $r = \cos 2\theta$ (rosácea de quatro pétalas)

Curvas Parametrizadas no Espaço

Quando uma função vetorial $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, está definida em um intervalo I da reta e é **contínua**, então o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) do plano tais que

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{e} \quad z = h(t) \quad (3.2)$$

quando t varia formam uma **curva no espaço**. As equações em (3.2) são ditas **equações paramétricas de C** , $\vec{r}$ é dita ser uma **parametrização de C** e t é chamado de **Parâmetro**.



Exemplo 3.9

Determine as curvas parametrizadas por:

1. $\vec{r}(t) = (1, t, 2t)$, $t \in (0, 1)$.
2. $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

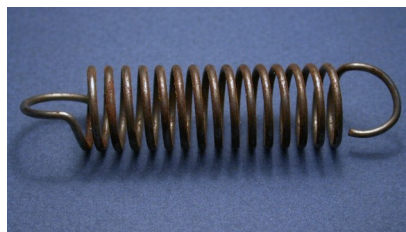
Hélices

A curva do exemplo anterior é uma **hélice**. Existem vários tipos de hélices, as mais simples são as **hélices circulares com passo constante**, cuja parametrização é dada por

$$\vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt),$$

onde a, b são constantes.

As hélices aparecem em diversas aplicações, como por exemplo no formato de molas e no modelo de DNA que é formado por uma dupla hélice.

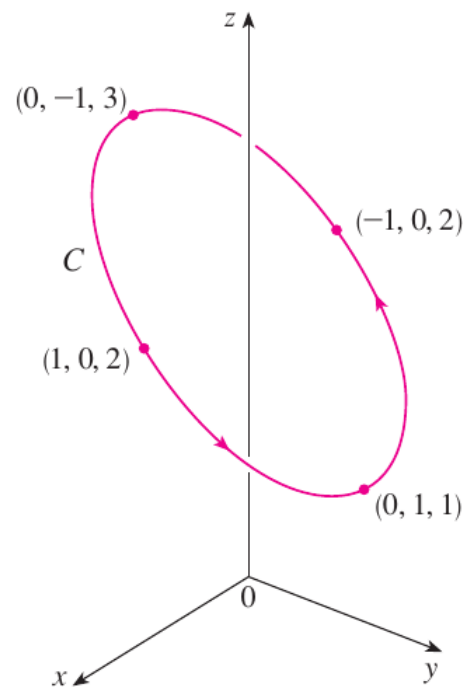
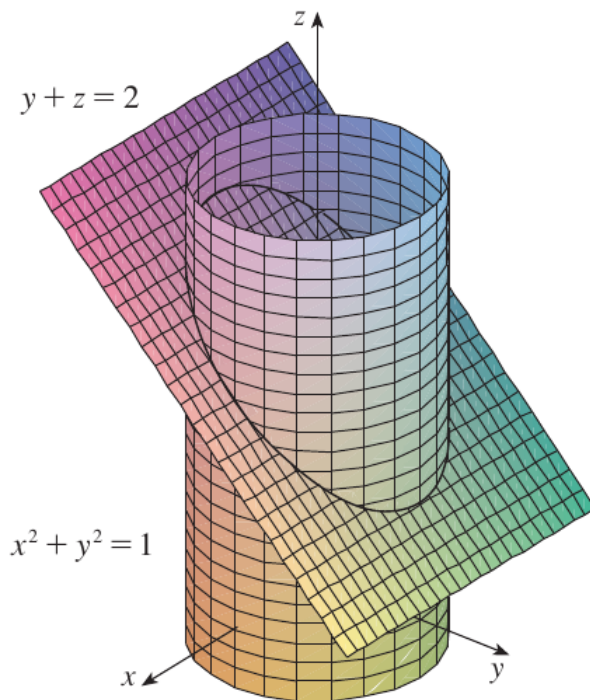


Parametrização por inteseção de superfícies

- **NÃO** existe equação cartesiana de curvas em $\mathbb{R}^3$;
- Uma equação cartesiana no $\mathbb{R}^3$ **SEMPRE** representa uma superfície.

$y + z = 2$ é um plano e $x^2 + y^2 = 1$ é um cilindro.

Muitas curvas no espaço, podem ser parametrizadas via interseção de duas superfícies.



Exemplo 3.10

Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção das superfícies:

1. Os planos: $y + z = 1$ e $x + y = 1$;
2. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $x + y = 1$;
3. da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 3$ com o plano $z = \frac{3}{2}$;
4. do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$;
5. do parabolóide $x^2 + y + z^2 = 1$ com o cilindro $y = x^2$.

**Para Casa 3.2**

1. Determine uma parametrização para o círculo de centro em $(1, 2)$ e raio 3.
2. Determine uma parametrização para o segmento de reta ligando o ponto $P = (1, 3, -2)$ ao ponto $Q = (2, -1, 3)$.
3. Calcule $\|\vec{r}(t)\|$, onde $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
4. Mostre que a curva $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ está contida no cone $z^2 = x^2 + y^2$ e use esse fato para esboçar a curva.
5. Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção dos dois parabolóides: $z = 2x^2 + \frac{y^2}{2}$ e $z = 4 - 2x^2 - \frac{3y^2}{2}$.

Derivadas

Definição 3.11

A **derivada** de uma função vetorial $\vec{r}$ é definida por:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h},$$

se esse limite existir.

Interpretação Geométrica

O vetor $\vec{r}'(t)$ é um **vetor tangente** à curva parametrizada por $\vec{r}$ no ponto $P = \vec{r}(t)$.

Proposição 3.12

Se $\vec{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, onde f_i , com $i = 1, \dots, n$, são funções deriváveis, então

$$\vec{r}'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$$

**Exemplo 3.13**

Encontre o vetor tangente unitário no ponto $t = 0$ da curva

$$\vec{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t}, \sin(2t)) .$$

Regras de Derivação

Proposição 3.14

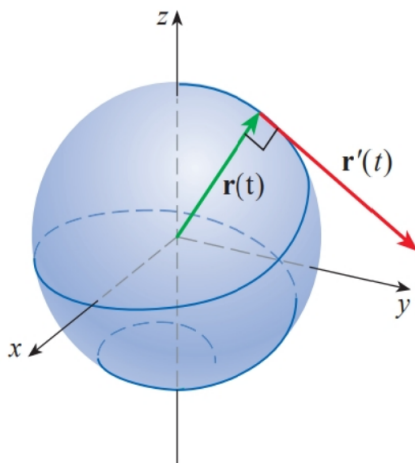
Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ funções vetoriais diferenciáveis, c uma constante e f uma função real. Então,

1. $\frac{d}{dt} (\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$
2. $\frac{d}{dt} (c\vec{u}(t)) = c\vec{u}'(t)$
3. $\frac{d}{dt} (f(t)\vec{u}(t)) = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}'(t)$
4. $\frac{d}{dt} (\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$
5. $\frac{d}{dt} (\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$
6. $\frac{d}{dt} (\vec{u}(f(t))) = f'(t)\vec{u}'(f(t))$ (regra da cadeia)



Exemplo 3.15

Mostre que se $\|\vec{r}(t)\| = c$ para todo $t \in I$, então $\vec{r}'(t)$ é ortogonal a $\vec{r}(t)$ para todo $t \in I$.



Comprimento de arco

Se $\vec{r} = \vec{r}(t)$, com $a \leq t \leq b$, é curva parametrizada e $\vec{r}'$ é contínua, pode-se mostrar que o **comprimento de arco** é dado por:

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$



Exemplo 3.16

Um planador está voando para cima ao longo da hélice $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Qual a distância percorrida ao longo de sua trajetória entre os pontos $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 2\pi)$.

Uma mesma curva C pode ser representada por mais de uma parametrização. Por exemplo,

$$\vec{\alpha}(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e

$$\vec{\beta}(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

ambas representam o círculo unitário com centro na origem.



Para Casa 3.3

Calcule o comprimento de arco de $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ e $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t)$.

3.2 Cálculo Vetorial de Curvas

Definição 3.17

Uma parametrização $\vec{r} = \vec{r}(t)$ é chamada **suave** em um intervalo I se $\vec{r}'$ for contínua e $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ em I .

Parametrização pelo comprimento de arco

Seja C uma curva **suave** parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Definimos a sua **função comprimento de arco** por

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du.$$

Note que

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\| > 0,$$

assim $s = s(t)$ é uma **função crescente** e de classe C^1 . Neste caso, s possui uma inversa, denotada por $t = t(s)$.

Isso nos permite **reparametrizar a curva C em relação ao comprimento de arco** fazendo

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s)), \quad 0 \leq s \leq L,$$

onde L é o comprimento final da curva.

É frequentemente útil usar a parametrização em relação ao comprimento de arco, pois este não depende do sistema de coordenadas nem da parametrização.

**Exemplo 3.18**

Reparametrize a hélice circular $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ utilizando o comprimento de arco a partir do ponto $(1, 0, 0)$.

Quando a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, geometricamente isso significa que o ponto $\vec{r}(s)$ é o ponto da curva que está a s unidades de comprimento do início da curva.

**Para Casa 3.4**

Seja $\vec{r}(t) = (e^t \sin(t), e^t \cos(t), \sqrt{2}e^t)$ e $P = (0, 1, \sqrt{2})$.

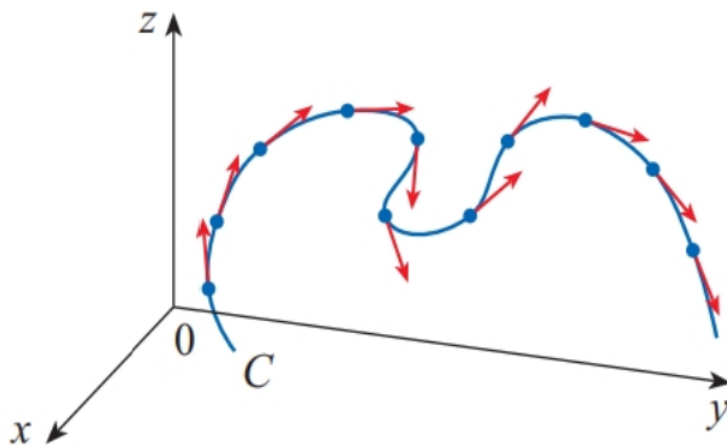
1. Encontre a função comprimento de arco da curva medida a partir do ponto P na direção crescente de t .
2. Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco começando de P .
3. Encontre o ponto a 4 unidades de P ao longo da curva na direção crescente de t .

Curvatura

Se C é uma curva parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ suave, então o **vetor tangente unitário** é definido por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

O vetor tangente unitário indica a direção da curva e muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda mais rapidamente quando se dobra mais acentuadamente.



A **curvatura** de C , em dado ponto, será definida de modo a medir

A taxa de variação da direção do vetor tangente unitário **por unidade de comprimento**.

Em outras palavras,

A medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto.

Por isso, definimos a curvatura como a norma da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento de arco, a saber,

Fórmula de definição da Curvatura

Seja C uma curva suave, parametrizada pelo comprimento de arco. A curvatura de C é a função

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|$$

onde $\vec{T}$ é o vetor tangente unitário.



Exemplo 3.19

Determine a curvatura da hélice circular $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ utilizando a reparametrização pelo comprimento de arco do exemplo anterior.

Entretanto, na maioria das vezes a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso, podemos usar a Regra da Cadeia para obter uma fórmula em termos de um parâmetro qualquer. Se $s = s(t)$ é a função comprimento de arco, então:

$$\frac{d\vec{T}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \|\vec{r}'(t)\|.$$

Logo,

Fórmula da curvatura para uma parametrização arbitrária

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$



Exemplo 3.20

- (a) Calcule a curvatura de um círculo de raio ρ .
- (b) Calcule a curvatura da parábola.

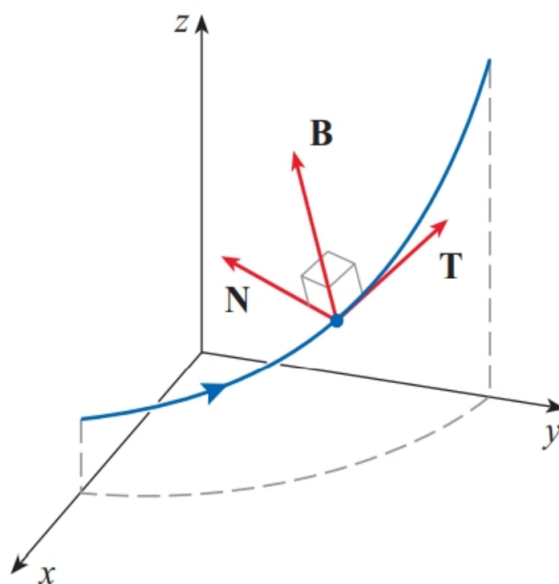
Vetores Normal principal e Binormal

Como $\vec{T}$ é unitário, sabemos que $\vec{T}$ é ortogonal à $\vec{T}'$, portanto definimos o **vetor normal unitário principal** ou simplesmente **vetor normal unitário** como

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$$

Este vetor indica a direção que na qual a curva está virando em cada ponto. A partir dele, definimos o **vetor binormal unitário**

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$



Estes três vetores formam uma base ortonormal muito importante em geometria diferencial e no estudo de movimento de corpos, chamada de **Triedro de Frenet**.



Exemplo 3.21

Determine os vetores normal e binormal da hélice circular

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t).$$

Movimento: velocidade e aceleração

Suponha que uma partícula se mova de forma que seu vetor posição no instante t seja $\vec{r}(t)$. Então vamos denotar por:

- $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ é o vetor **velocidade da partícula** no instante t .
- $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ é a **velocidade escalar** da partícula no instante t .
- $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$ é o vetor **aceleração** da partícula no instante t .
- $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$ a **aceleração escalar** da partícula no instante t .

Podemos mostrar que a aceleração é dada por:

$$\vec{a} = v' \vec{T} + v^2 \kappa \vec{N}$$

Com isso temos as seguintes conclusões:

- O vetor $\vec{B}$ não aparece, ou seja, a aceleração sempre está no plano determinado por $\vec{T}$ e $\vec{N}$, chamado **plano osculador**.
- A **componente tangencial** da aceleração mede a taxa de variação do módulo da velocidade, isto é, a **mudança na velocidade escalar**.
- A **componente normal** é dada pelo quadrado da velocidade escalar e pela curvatura.



Exemplo 3.22

Um objeto de massa m que se move em uma trajetória circular com velocidade angular constante ω tem vetor posição dado por $\vec{r}(t) = (\rho \cos(\omega t), \rho \sin(\omega t))$. Determine a força que age sobre o objeto.

Usando a última equação, podemos deduzir a seguinte fórmula para a curvatura.

Terceira fórmula da curvatura

A curvatura de uma curva parametrizada suave $\vec{r} = \vec{r}(t)$ é dada por:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}{v^3(t)} = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$



Exemplo 3.23

Determine a curvatura da cúbica retorcida $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$.

**Para Casa 3.5**

1. Mostre que a curvatura de uma curva plana que tem equação cartesiana da forma $y = f(x)$ é dada por:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}.$$

2. Calcule a curvatura da parábola $y = x^2$ e determine o ponto onde a curvatura é máxima.
3. Determine as componentes normal e tangencial da aceleração da partícula que se move segundo a trajetória $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^t\vec{j}$.
4. Uma partícula se move sobre a parábola $y = x^2$ da esquerda para a direita. Quando ela passa pelo ponto $(2, 4)$, sua velocidade é $v = 3$ m/s e $v' = 7$ m/s². Ache o vetor velocidade e o vetor aceleração neste ponto.
5. Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração da curva

$$\vec{r}(t) = (t^2 + 1)\vec{i} + t^3\vec{j}, \quad t \geq 0.$$

6. Determine uma parametrização para a reta tangente à hélice $\vec{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, t)$ no ponto $P = (0, 1, \pi/2)$.
7. Determine o comprimento de arco da cardioide $r = 2(1 + \cos \theta)$.