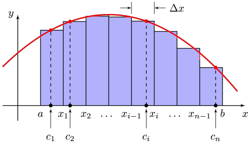
Cálculo II
Cálculo Integral e Aplicações

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$



Prof. Reginaldo Demarque

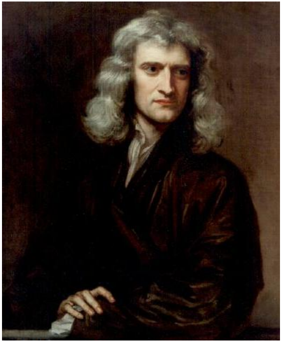
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN

Sumário

Sumário

A origem do Cálculo Integral

Na segunda metade do século XVII, Newton na Inglaterra e Leibniz na Alemanha mudaram o curso da matemática para sempre. Ele pegaram uma colcha de retalhos soltas de ideias sobre movimento e curvas e transformaram isso no cálculo.



Isaac Newton

1643-1727

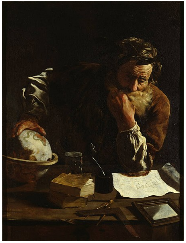
Gottfried Wilhelm Leibniz

1646-1716

O Precursor do Cálculo

Muitos historiadores acreditam que o verdadeiro precursor do cálculo foi Arquimedes. Ele aperfeiçoou o método da exaustão de Eudoxus para encontrar áreas de figuras planas.

Arquimedes é considerado o maior matemático da antiguidade. Segundo a lenda, foi morto por um soldado romano durante a tomada da cidade enquanto estudava um diagrama geométrico na areia.

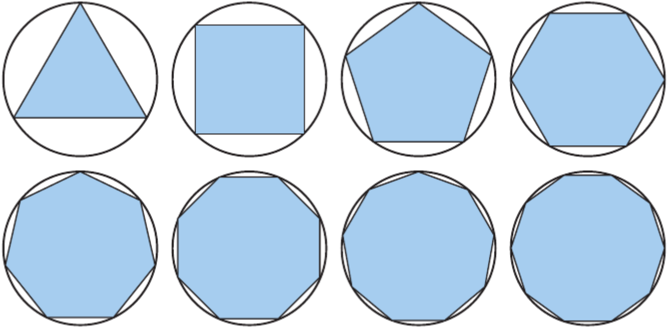


Arquimedes de Siracusa
287-212 BCE.

Pint. Domenico Fetti (1620)

Em seu livro A Medida do Círculo ele mostrou que o valor exato do número π está entre $223/71$ e $22/7$, ou seja, estaria aproximadamente entre 3,1408 e 3,1429, aproximação que obteve inscrevendo e circunscrevendo o círculo em um polígono regular de 96 lados. Usando este método ele foi capaz de calcular o volume da esfera, o volume e a área do cone, o volume obtido por revolução de qualquer segmento de uma parábola ou hipérbole.

Método da Exaustão de Eudoxus

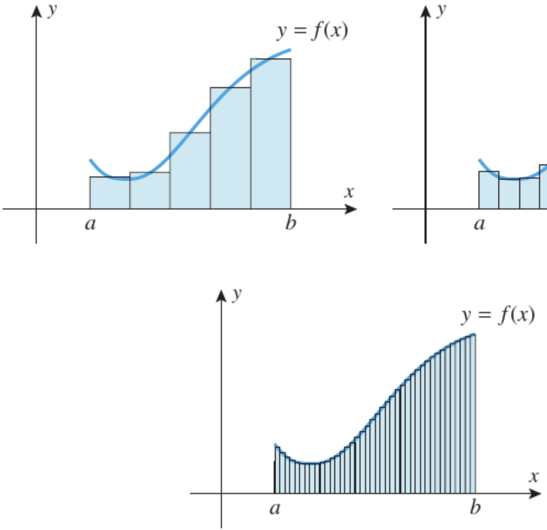


Polígonos Inscritos

Na tabela abaixo temos a área A_n de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio 1.

n	A_n	erro
12	3.10582854123025	0.0357641123595442
24	3.13262861328124	0.00896404030855535
48	3.13935020304687	0.00224245054292638
96	3.14103195089051	0.000560702699283322
192	3.1414524722854**6**	0.000140181304330689
384	3.14155760791186	3.50456779352193e-5
768	3.14158389214832	8.76144147454738e-6
1536	3.14159046322805	2.19036174264886e-6
3072	3.14159210599927	5.47590521371433e-7
6144	3.14159251669216	1.36897635449884e-7

A ideia da integral



Notação Sigma

A notação sigma permite expressar uma soma com muitos termos em uma forma compacta.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

- O símbolo $\sum$ é chamado de somatório. Ele é a letra grega sigma maiúscula correspondente ao nosso S significa.
- k é o índice do somatório.
- a_k é o termo geral da soma.
- 1 é o índice inferior e n é o índice superior.

Exemplo

1. $$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$
2. $$\sum_{k=1}^{5} (-1)^k k = ?$$

Dado $[a, b]$ um intervalo fechado da reta, o seguinte conjunto

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, é dito uma partição de $[a, b]$.

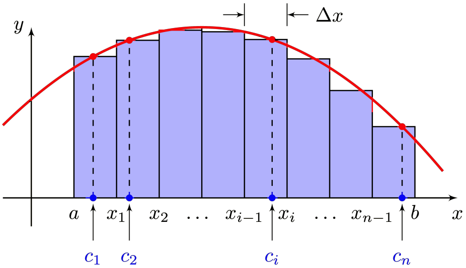
Seja $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
Um conjunto $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ é dito um pontilhamento da partição P. Uma partição P a qual escolhemos um pontilhamento é dita uma partição pontilhada e é denotada por P^*.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$.

A soma

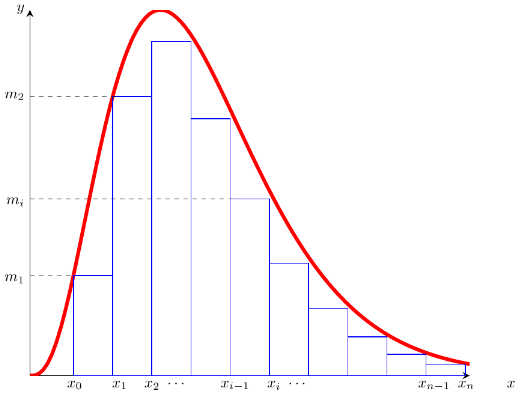
$$R(f, P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

é dita uma soma de Riemann para f no intervalo [a,b].



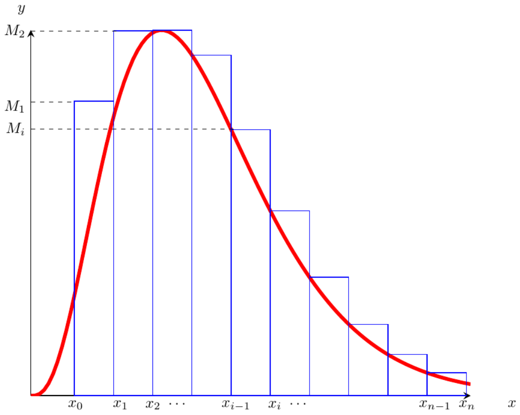
Somas inferiores

- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $m_i = \min\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$
- $s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ somas inferiores de f em relação a P.



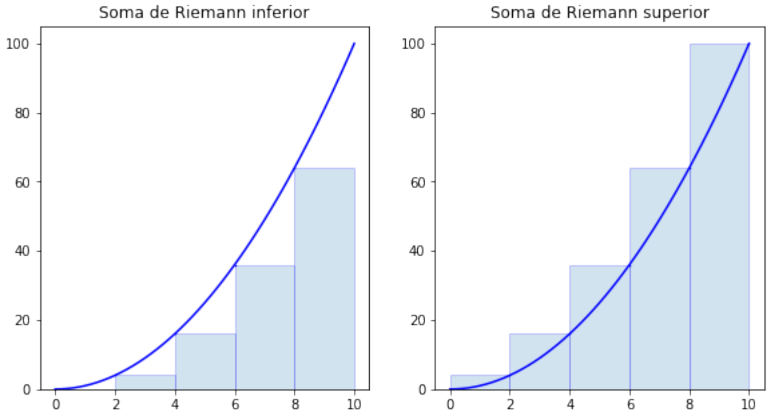
Somas Superiores

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $M_i = \max\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$
- $S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ as somas superiores de f em relação a P.



Exemplo

Encontre a área abaixo do gráfico de $f(x) = x^2$ quando $x \in [0, 10]$.

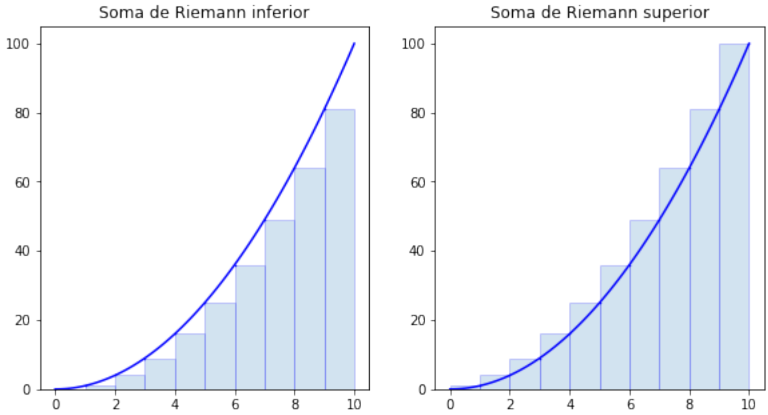


Partição com 5 subintervalos de mesmo comprimento.

$$s(f, P) = 240 \leq A \leq 440 = S(f, P)$$

Exemplo

Encontre a área abaixo do gráfico de $f(x) = x^2$ quando $x \in [0, 10]$.

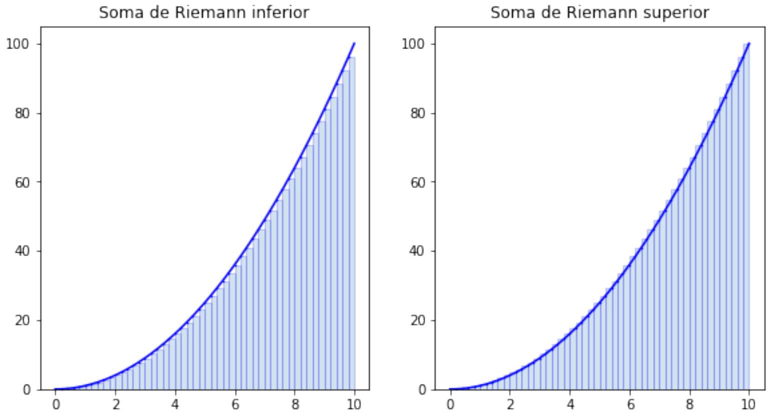


Partição com 10 subintervalos de mesmo comprimento.

$$s(f, P) = 285 \leq A \leq 385 = S(f, P)$$

Exemplo

Encontre a área abaixo do gráfico de $f(x) = x^2$ quando $x \in [0, 10]$.

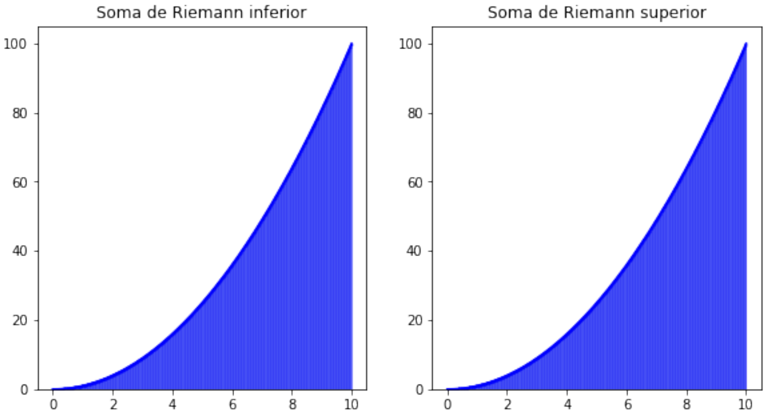


Partição com 50 subintervalos de mesmo comprimento.

$$s(f, P) = 323 \leq A \leq 343 = S(f, P)$$

Exemplo

Encontre a área abaixo do gráfico de $f(x) = x^2$ quando $x \in [0, 10]$.



Partição com 1000 subintervalos de mesmo comprimento.

$$s(f, P) = 332.8335 \leq A \leq S(f, P) = 333.8335$$

Para Casa 1

Mostre que para $f(x) = x^2$, com $x \in [0, 10]$, se P é uma partição com n subintervalos de mesmo comprimento, isto é, $\Delta x_i = 10/n$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, então

$$s(f, P) = \frac{1000}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

e

$$S(f, P) = \frac{1000}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

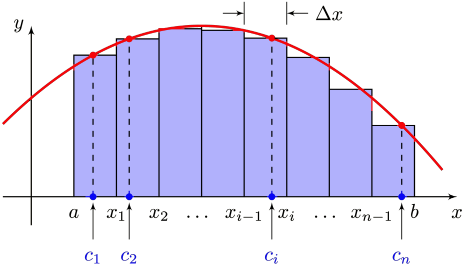
Aplique o limite quando $n \to +\infty$ e conclua que a área abaixo do gráfico de f é $\frac{1000}{3}$

Definição 1

Dizemos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada é integrável em $[a, b]$ quando existe um número real I tal que

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = I,$$

qualquer que seja a partição P^*. Em caso afirmativo dizemos que I é a integral de f em $[a, b]$ e o denotamos por $\int_a^b f(x)dx$.



O símbolo $\int$ de integral, que é um S alongado, foi introduzido por Leibniz em 1675. Leibniz não só tinha uma notável habilidade para construir notações; também criou termos como abscissa, ordenada, coordenada, eixo de coordenadas e função. Quem primeiro usou a palavra "integral" foi Jacob Bernoulli, em 1690.

Área

Pela construção, quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, vimos que a área abaixo do gráfico da função e acima do eixo x é dada pela integral, isto é,

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 2

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e F é uma primitiva de f, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

Exemplo

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx$
3. $\displaystyle\int_a^b x^n dx$
4. $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x \; dx$

Corolário 3

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dt = f(t), \forall t \in [a,b]. \tag{2}$$

Corolário 3

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dt = f(t), \forall t \in [a,b]. \tag{2}$$

"O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do cálculo e realmente é um dos grandes feitos da mente humana. Antes de sua descoberta, desde os tempos de Eudóxio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas, volumes e comprimentos de curvas eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armado com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram a partir do Teorema Fundamental, veremos nos capítulos a seguir que esses problemas desafiadores são acessíveis para todos nós."

J. Stewart, Cálculo Vol. 1.

Propriedades da Integral

Teorema 4

Se f for contínua em $[a, b]$, ou tiver apenas um número finito de descontinuidades do tipo saltos, então f é integrável em $[a, b]$.

Sejam f e g funções integráveis no intervalo $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante.

1. $\displaystyle\int_a^b k\ dx = k(b-a)$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$
3. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

4. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
6. $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
7. Se $f \leq g$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Usando Python

```python
import sympy as sp

x = sp.symbols('x') #variável
f=sp.sin(x) #função

sp.integrate(f,(x,0,sp.pi)) #integral definida
```

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = 2.$$

Para Casa 2

Calcule as integrais

a) $$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\, dx$$

b) $$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

c) $$\int_1^4 \frac{2x^3 + x^3\sqrt{x} - 1}{x^3}\, dx$$

Para Casa 3

Determine área da região limitada que está acima do eixo x e abaixo do gráfico da função $y = x^3 - x$.

Integral indefinida

A integral indefinida de f em relação a x é o conjunto de todas as primitivas de uma função f e denotamos da seguinte forma

$$\int f(x)dx.$$

O símbolo $\int$ é dito sinal de integração, f é dita integrando da integral e x é a variável de integração.

Integral indefinida

A integral indefinida de f em relação a x é o conjunto de todas as primitivas de uma função f e denotamos da seguinte forma

$$\int f(x)dx.$$

O símbolo $\int$ é dito sinal de integração, f é dita integrando da integral e x é a variável de integração.

Exemplo

Encontre as integrais indefinidas

$$\int \frac{1}{x}dx, \quad \int e^x\ dx, \quad \int \frac{1}{1+x^2}dx, \quad \int \sec^2 dx.$$

Usando Python

```python
import sympy as sp

x = sp.symbols('x') #variável
f=1/x #função
g=1/(1+x**2) #função
intf=sp.integrate(f,x) #integral indefinida
intg=sp.integrate(g,x) #integral indefinida
```

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(x) + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{atan}(x) + C.$$

Observação

Neste curso, reservaremos a notação $\log(x)$ para o logarítmo na base e, isto é, $\log(x) = \log_e(x)$. Veja a justificativa em Link

Sumário

A regra da Substituição

Teorema 5

Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f é contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

A regra da Substituição

Teorema 5

Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f é contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Exemplo

Calcule as integrais

1. $\int \cos(x^2)2x \; dx$
2. $\int e^{x^3} x^2 \; dx$

Para Casa 4

Calcule as integrais

1. $\displaystyle\int \cos^2(x)\, dx$
2. $\displaystyle\int \sec(x)\, dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

Corolário 6

Se g' é contínua em $[a, b]$ e f é contínua em $g([a, b])$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Corolário 6

Se g' é contínua em $[a,b]$ e f é contínua em $g([a,b])$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Exemplo

Calcule $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

Para Casa 5

Calcule as integrais

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \; dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}$

Integração por partes

Teorema 7

Se f e g têm derivadas contínuas, então

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \tag{3}$$

Integração por partes

Teorema 7

Se f e g têm derivadas contínuas, então

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \tag{3}$$

Tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, assim a forma diferencial da equação (3) se torna

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Exemplo

Calcule as integrais abaixo:

a) $$\int x \cos x \; dx$$

b) $$\int \log x \; dx$$

c) $$\int x^2 e^x \; dx$$

d) $$\int e^x \cos x \; dx$$

Para Casa 6

Calcule as integrais

1. $\displaystyle\int \sec^3 x \; dx$

Substituição Trigonométrica

Expressão	Identidade	Substituição
$\sqrt{1-x^2}$	$1-\sin^2(\theta)=\cos^2(\theta)$	$x=\sin(\theta),\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{1+x^2}$	$1+\tan^2(\theta)=\sec^2(\theta)$	$x=\tan(\theta),\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2-1}$	$\sec^2(\theta)-1=\tan^2(\theta)$	$x=\sec(\theta),$ $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ ou $\pi\leq\theta<\frac{3\pi}{2}$

Exemplo

1. Calcule $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$
2. Mostre que a área do círculo de raio r é πr^2.

Para Casa 7

Calcule
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$$

Exercício

Obtenha a fórmula da área da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a, b > 0$.

Como calcular a integral $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}dx$?

Integração de funções racionais

Como calcular a integral $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}dx$?

Note que fazendo a divisão dos polinômios obtemos que

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}dx = \int 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}dx = x^2 + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}dx.$$

E o problema se reduz a calcular a última integral.

Integração de funções racionais

Como calcular a integral $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}dx$?

Note que fazendo a divisão dos polinômios obtemos que

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}dx = \int 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = x^2 + \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx.$$

E o problema se reduz a calcular a última integral.

Note que

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}.$$

Portanto podemos calcular a integral!

Obviamente o python é capaz de calcular essa integral diretamente

```
from sympy import *

x=symbols('x')

integrate((2*x**3-4*x**2-x-3)/(x**2-2*x-3),x)
```

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx = x^2 + 3\log(x-3) + 2\log(x+1) + C$$

Entretanto, o comando apart do sympy, nos permite decompor o integrando para que possamos resolvê-lo com a técnica apresentada:

```
from sympy import *

apart((2*x**3-4*x**2-x-3)/(x**2-2*x-3),x)
```

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}dx = 2x + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

Para Casa 8

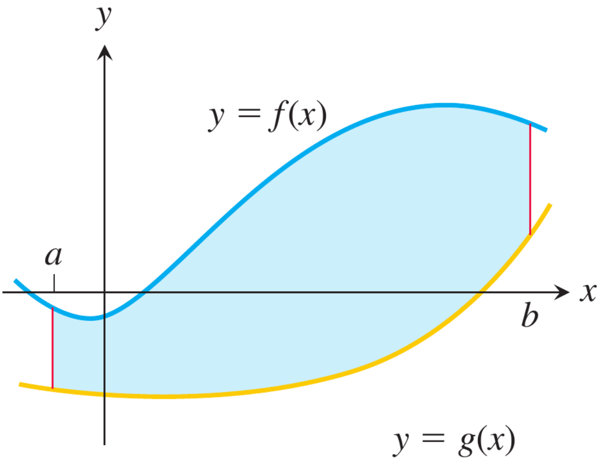
Calcule

1. $$\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - x}dx$$
2. $$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx$$

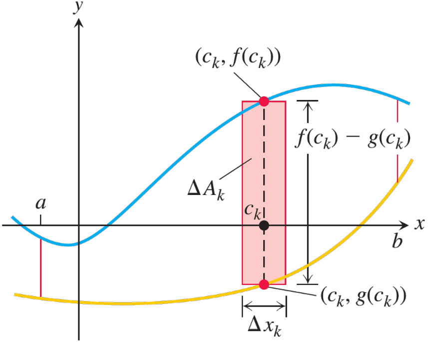
Sumário

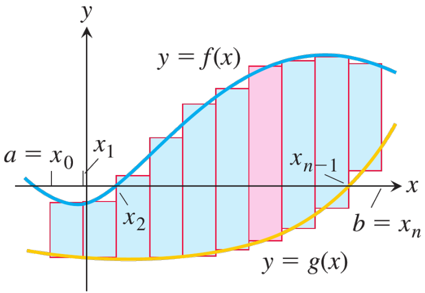
Área entre curvas

Queremos determinar a área delimitada pelo gráfico de duas funções.



No caso em que $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$.



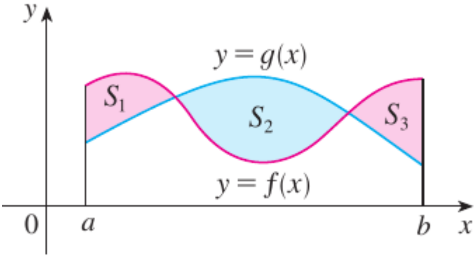


$$\text{Área}(S) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Definição 8

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. A área limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Exemplo

Determine a área limitada pelas curvas $y = 2 - x^2$ e $y = -x$.

As vezes é mais conveniente integrar em relação ao eixo y a fim de determinar a área.

Exemplo

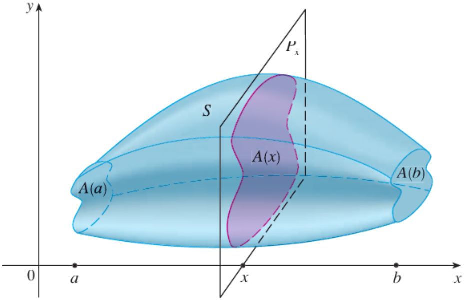
Determine a área da região do primeiro quadrante que é limitada acima por $y = \sqrt{x}$ e abaixo pelo eixo x e pela reta $y = x - 2$.

Para Casa 9

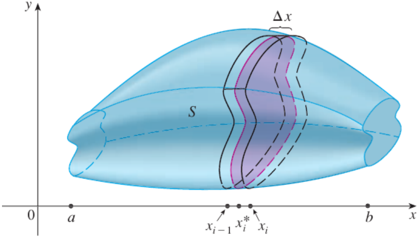
1. Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.
2. Encontre a área da região limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

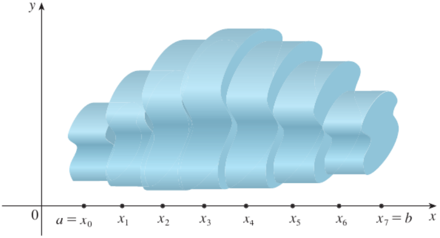
Volumes por fatiamento

Uma seção transversal de um sólido S é a região plana formada pela interseção entre S e um plano. Seja S um sólido limitado por dois planos perpendiculares a um eixo OX nos pontos a e b. Se $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ é a função contínua que para cada $x \in [a, b]$ associa a área $A(x)$ da seção transversal de S por um plano perpendicular a OX no ponto x, então podemos aproximar o volume do sólido S.



- $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$.
- S é divido em n "fatias" de largura Δx_k.
- $\{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ um pontilhamento da partição P





$$V_i \approx A(x_i^*)\Delta x_i.$$

Portanto o volume V do sólido S é aproximadamente

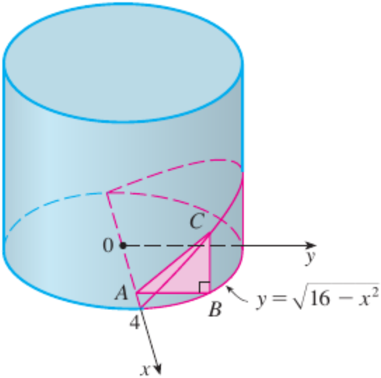
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i.$$

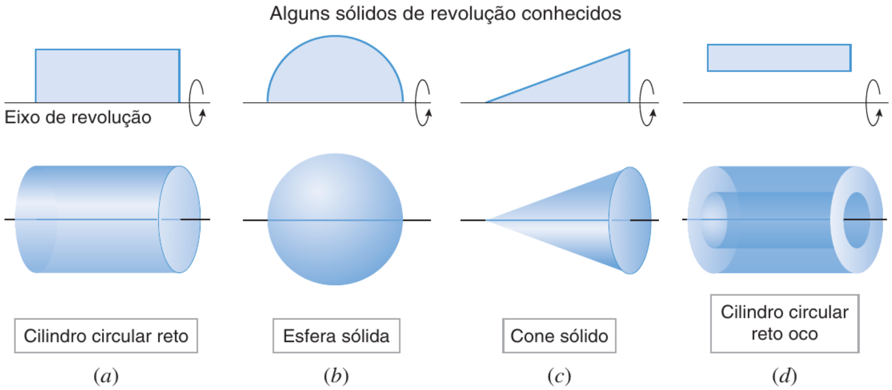
Com isso, aplicando o limite quando $\|P\| \to 0$ temos que

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b A(x)dx.$$

Exemplo

Uma cunha curva foi obtida por meio do corte da metade de um cilindro de raio 4 por dois planos. Um deles é perpendicular ao eixo do cilindro. O segundo cruza o primeiro, formando um ângulo de 30° no centro do cilindro. determine o volume da cunha.

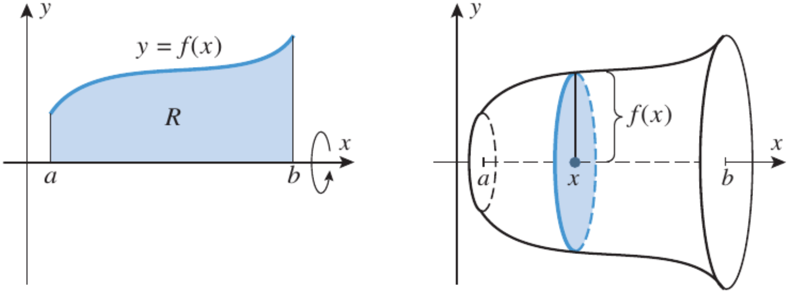



Alguns sólidos de revolução conhecidos
Eixo de revolução
Cilindro circular reto
Esfera sólida
Cone sólido
Cilindro circular reto oco
(a)
(b)
(c)
(d)

Método dos Discos

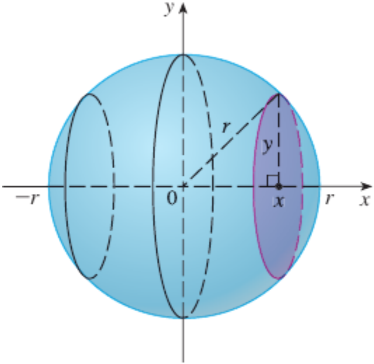
No caso em que o eixo de rotação é paralelo ao eixo de coordenadas, podemos usar o chamado método dos discos.

$$V = \int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 \, dx$$



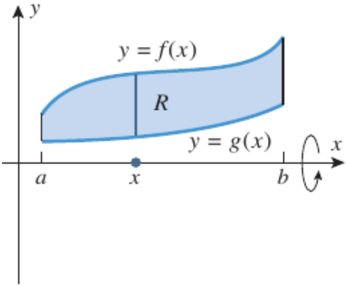
Exemplo

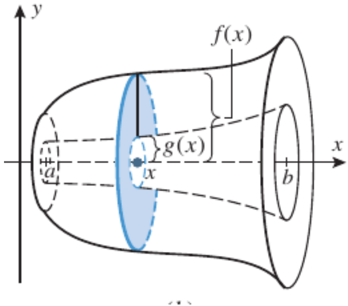
Mostre que o volume da esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.



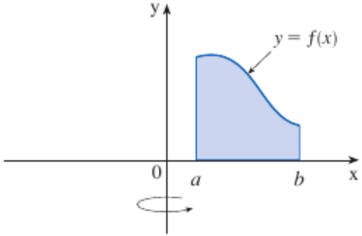
Usando o mesmo raciocínio, podemos resolver o seguinte tipo de problema:

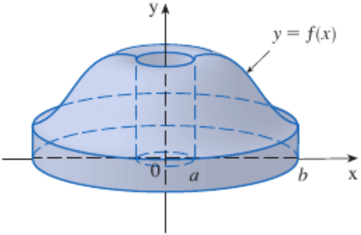
$$V = \int_a^b \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx$$



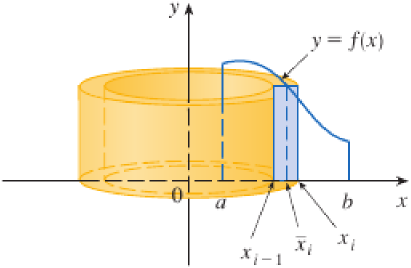


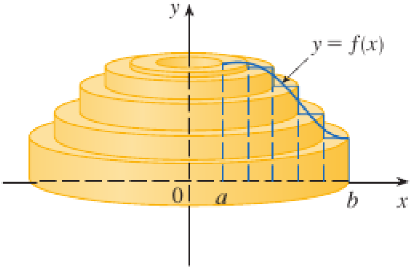
Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não negativa com $a > 0$. Considere a região limitada pelo gráfico de f e o eixo OX. Ao girarmos essa região em torno do eixo OY geramos um sólido S.





- $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ partição de $[a, b]$
- $C = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$ um pontilhamento de P, onde $\overline{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$



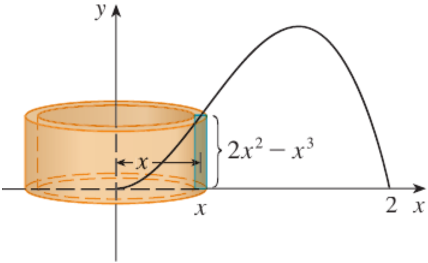


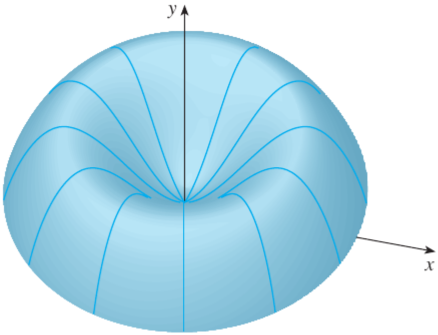
Com isso, o volume do sólido é dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Exemplo

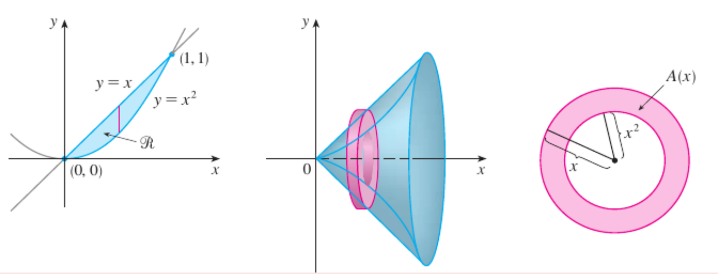
Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.





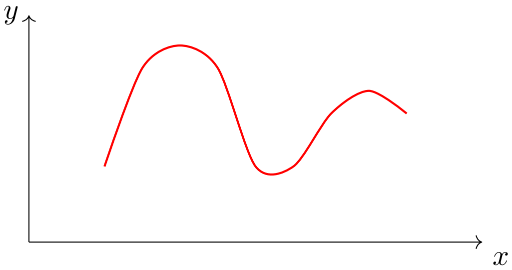
Para Casa 10

1. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do exio x da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

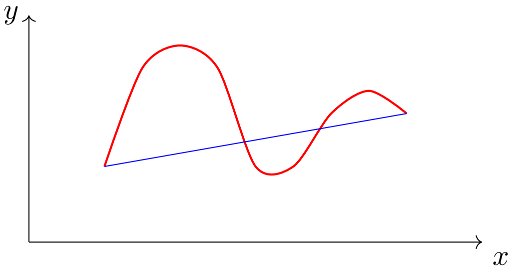


2. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno da reta $x = 2$.

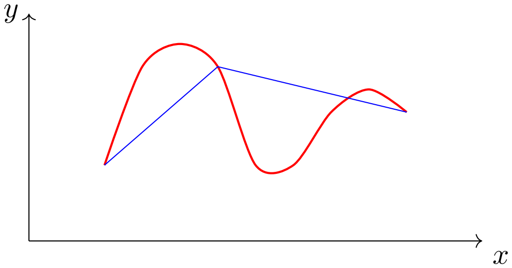
Imagine que se queira calcular o comprimento da curva do gráfico abaixo.



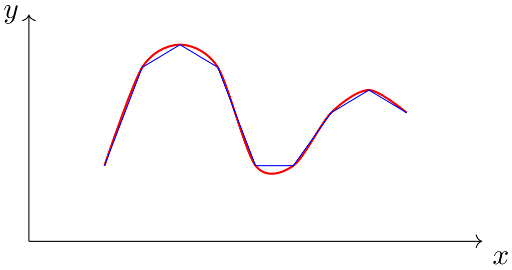
Uma aproximação seria o comprimento do seguimento ligando os extremos da curva.



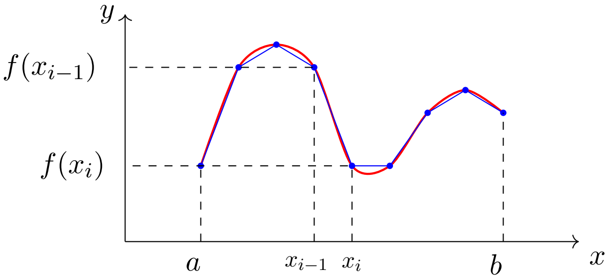
Podemos melhorar a aproximação considerando o comprimento de uma poligonal.



Quanto mais divisões, melhor a aproximação!



Assim, seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função, a fim de calcular uma aproximação do comprimento da curva dada pelo gráfico de f subdividimos o intervalo $[a, b]$ em vários subintervalos e calculamos o comprimento da poligonal, como abaixo.



$$L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} = f'(c_i),$$

portanto,

$$L_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\ \Delta x_i$$

Com isso, o comprimento L da curva é

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx.$$

Exemplo

1. Calcule o comprimento de arco da curva $y = \sqrt{x^3}$ entre os pontos $(1, 1)$ e $(4, 8)$.
2. Mostre que o comprimento da circunferência de um círculo de raio r é $2\pi r$.

Integrais Impróprias: Intervalo Infinito

Vimos que a integral definida de uma função positiva representa a área abaixo de seu gráfico. Analisando o gráfico da função $\dfrac{1}{x^2}$ quando $x \in [1, +\infty)$ somos levados a pensar que a região sob o gráfico tem área “infinita”.

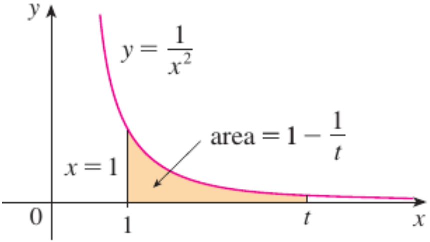
Sabemos que

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c.$$

Porém não faz sentido aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Entretanto, para cada $t \in (0,1)$ podemos calcular

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{t}.$$



Portanto faz sentido aplicar o limite quanto $t \to +\infty$ e podemos definir a área da região por

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Definição 9

(a) Se $\int_a^b f(x)dx$ existe para cada número $b \geq a$, então definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

(b) Se $\int_a^b f(x)dx$ existe para cada número $a \leq b$, então definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

As integrais acima são ditas impróprias. Se os limites existem dizemos que as integrais impróprias convergem e se os limites não existem dizemos que elas divergem.

Definição 10

Se $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ e $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

Exemplo

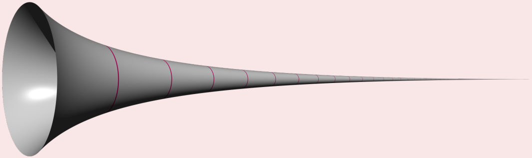
a. Calcule $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$
b. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

Para Casa 11

1. Determine os valores de $p \in \mathbb{R}$ para os quais a seguinte integral converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

2. Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$, quando $1 \leq x < +\infty$, em torno do eixo x, conhecido como Trombeta de Gabriel ou Trombeta de Torricelli



Integrais Impróprias: Integrando Descontínuo

Agora, suponha que queremos calcular a área abaixo do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ quando $x \in (0, 1]$. Sabemos que

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c.$$

Porém não faz sentido aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, pois a função não está definida em $x = 0$.

De modo análogo ao feito anteriormente, podemos definir a área da seguinte forma

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t}\right) = +\infty.$$

Definição 11

(a) Se f é contínua em $(a,b]$ e descontínua em a, então definimos

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

(b) Se f é contínua em $[a,b)$ e descontínua em b, então definimos

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

(c) Se f é contínua em $[a,c) \cup (c,b]$ e descontínua em c, então definimos

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Exemplo

1. Calcule $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$
2. Calcule $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$

Para Casa 12

Calcule

$$\int_0^1 \log(x)\,dx.$$

Trombeta de Gabriel

Podemos encontrar em livros de cálculo que a área de uma superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de uma função f não-negativa definida em $[a, b]$ é dada por

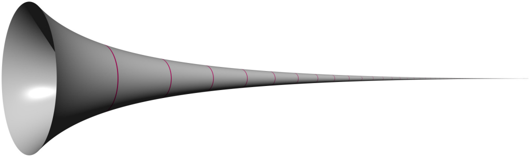
$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Com isso temos que a área de superfície da Trombeta de Gabriel é dado pela integral

$$\int_1^{+\infty} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Note que $\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} > 1,\ \forall x > 0.$ Com isso,

$$\int_1^b 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx \geq \int_1^b 2\pi \frac{1}{x}dx.$$



Aplicando o limite deduzimos que a primeira integral diverge. Assim, a trombeta do Anjo Gabriel tem volume finito porém área de superfície infinita, ou seja, O arcanjo poderia encher a trombeta com pouco mais de 3 unidades cúbicas de tinta, mas mesmo que usasse toda a tinta do universo, não poderia pintá-la!!!

Teste de comparação

Algumas vezes é impossível ou uma tarefa muito difícil calcular o valor exato de uma integral imprópria, mas ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente

Teorema 12 (Teste de comparação)

Suponha que f e g sejam funções contínuas com $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $x \geq a$.

a. Se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ também convergente.
b. Se $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ também divergente.

.

O teste também é válido quando um dos extremos do limite de integração é infinito.

Exemplo

Decida sobre a convergência das integrais.

a. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$
b. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

Teste de comparação no limite

Teorema 13

Sejam f e g funções positivas e contínuas em $[a, +\infty)$ tais que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

1. Se $0 < L < +\infty$, então as integrais $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.
2. Se $L = 0$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ também converge.

Observação 14

1. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.
2. Este teste também é válido para os outros tipos de integrais impróprias, mutatis mutandis.

Proposição 15

Seja f contínua em $[a,b)$. Se $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ também converge.

Proposição 15

Seja f contínua em $[a,b)$. Se $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ também converge.

Exemplo

Decida sobre a convergência da integrais.

1. $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x^3}}$$
2. $$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}dx$$
3. $$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\cosh x}dx$$