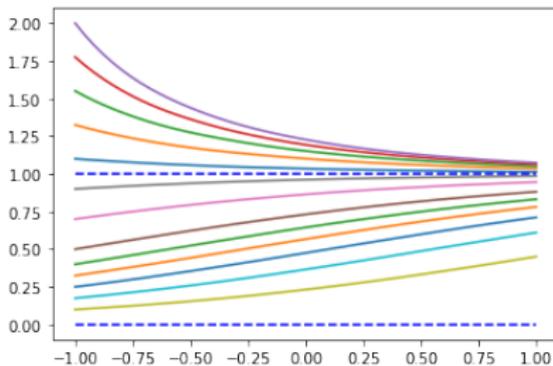


# Cálculo II

## Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Prof. Reginaldo Demarque



Universidade Federal Fluminense  
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS  
Departamento de Ciências da Natureza – RCN  
Campus de Rio das Ostras



# Sumário

- 1 EDO's
- 2 EDO's de 1ª ordem
- 3 EDO's de 2ª ordem lineares
- 4 Vibrações Mecânicas Livres
  - Vibrações Livres
  - Vibrações Livres Amortecidas



# Equações Diferenciais Ordinárias

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números. Uma **equação diferencial** é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas desta função.



## Exemplo

Primeiros modelos:

- 1 **Crescimento Populacional Malthusiano:**  $y' = ky$
- 2 **Crescimento Populacional Logístico:**  $y' = ky(M - y)$
- 3 **Queda Livre de Corpos:**  $h''(t) = -g$
- 4 **Vibrações Mecânicas:**  $my'' + ky = 0$
- 5 **Pêndulo Simples:**  $\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$



# Classificação

As equações diferenciais são classificadas quanto ao **tipo**, à **ordem** e à **linearidade**.

- a) Dizemos que uma equação diferencial é **ordinária**, ou simplesmente **EDO**, quando envolver somente funções de uma variável. Caso contrário dizemos que é **parcial**, ou simplesmente (EDP). As duas equações anteriores são EDO's e um exemplo de EDP é a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

- b) Uma equação diferencial é dita de **n-ésima ordem** quando a maior ordem das derivadas é  $n$ .
- c) Uma EDO é dita **linear** quando é da forma

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y + f(t) = 0.$$

E **não linear** caso contrário.



## Definição 1

Uma *solução* de uma EDO de ordem  $n$  em um intervalo  $I$  é uma função  $y(t)$  definida no intervalo  $I$  tal que as derivadas até ordem  $n$  estão definidas em  $I$  e satisfazem a equação neste intervalo.



## Exemplo

Considere a equação

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Note que  $y_1(t) = e^t$  e  $y_2(t) = e^{2t}$  são soluções da equação para todo  $t \in \mathbb{R}$ .



# EDO's de 1ª ordem

Uma EDO de 1ª ordem é uma equação da forma

$$F(t, y, y') = 0.$$

Um problema da forma

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

é dito **problema de valor inicial (PVI)**. Uma **solução geral** de uma EDO de 1ª ordem, é uma família de soluções que dependem de uma constante arbitrária, tal que toda solução particular pode ser obtida desta família por uma escolha apropriada da constante.



## Modelo Populacional Malthusiano

Este tipo de modelo é razoável para descrever populações que tem **recurso ilimitados para crescimento e ausência de predadores**.

- $y(t)$ : número de indivíduos de uma população no instante  $t$ .
- $y'(t)$ : taxa de crescimento de uma população no instante  $t$ .
- Supõe-se que a **taxa de crescimento** de uma população é proporcional à **população presente**

$$y'(t) = ky(t)$$

Supondo que a população no instante  $t = 0$  é  $y_0$ , determine a função  $y = y(t)$ . Em quanto tempo a população dobra de tamanho?





## Para Casa 1

- 1 Determine uma solução geral para a equação

$$y'(t) = y(t).$$

- 2 Determine uma solução para o PVI

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$



# Campos de Direções

Campos de Direções são ferramentas validas no estudo de soluções de equações diferenciais da forma

$$y'(t) = f(t, y),$$

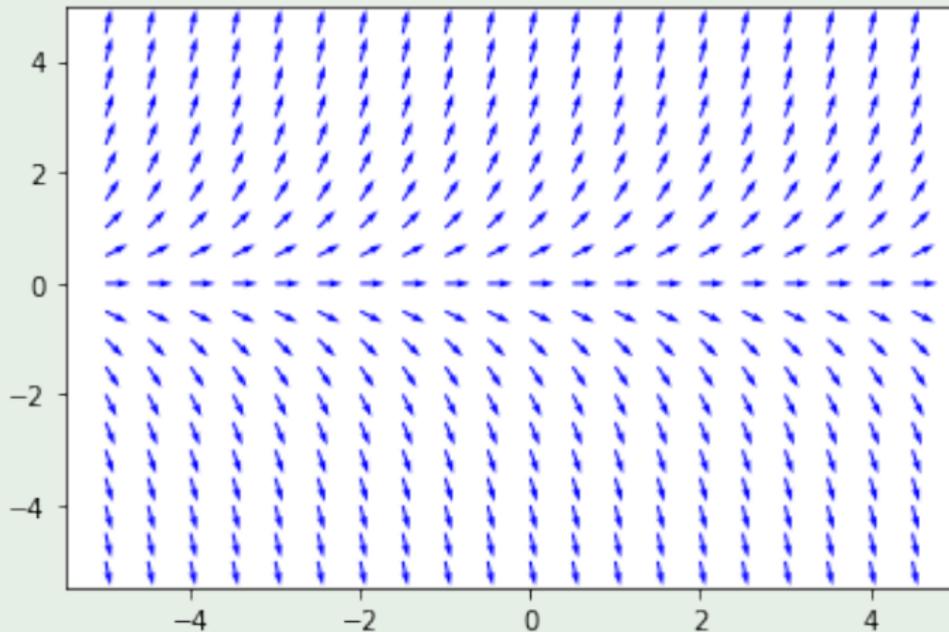
onde  $f$  é uma função dada chamada de **função taxa de variação**. Ele é construído desenhando-se em cada ponto de uma malha retangular um segmento de reta cujo coeficiente angular é valor de  $f$  naquele ponto.





## Exemplo

Campo de direções de  $y' = y$



# Equações Separáveis

As EDO's de 1ª ordem **separáveis** são equações da forma

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Integrando esta equação em relação a  $x$  temos que

$$\int g(y)y' dx = \int f(x) dx + C.$$

Fazendo a substituição  $u = y(x)$ ,  $du = y'(x)dx$  temos que

$$\int g(u) du = \int f(x) dx + C.$$

Assim, se  $G$  é uma primitiva de  $g$  temos que

$$G(y(x)) = \int f(x) dx + C$$



# Crescimento Populacional Logístico

Vimos que um modelo simples de crescimento populacional é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população  $\frac{dy}{dt}$  é proporcional à população presente  $y(t)$  naquele instante. O **crescimento logístico**, leva em conta que a população tem um valor máximo sustentável  $M$ . Quando a população se aproxima da capacidade máxima, os recursos tornam-se menos abundantes e a taxa de crescimento começa a diminuir. Uma relação simples que exhibe esse comportamento é quando

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$





## Exemplo

Considere o problema de crescimento logístico:

$$\begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(0) = y_0, y_0 \geq 0. \end{cases}$$

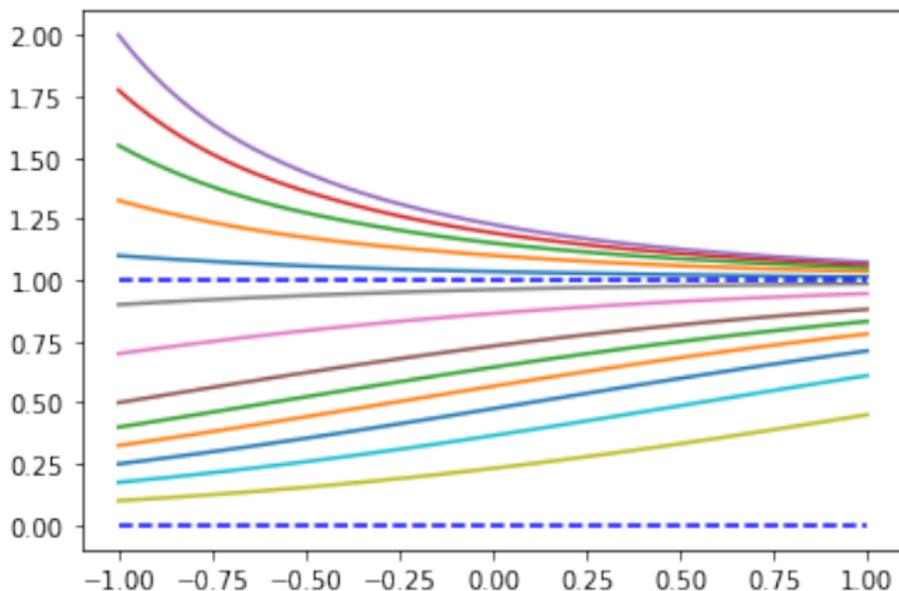
Mostre que a solução geral é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}, t \in \mathbb{R}.$$



## Solução geral

$$y(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}, t \in \mathbb{R}.$$



Família de Soluções para diversos valores de  $C$ .



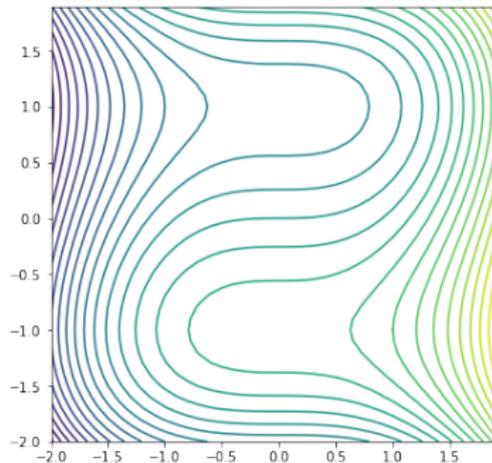


## Exemplo

$$y' = \frac{x^2}{1 - y^2}$$

Solução geral

$$y^3 + x^3 - 3y = C$$



Família de Soluções para diversos valores de  $C$ .



## EDO's Lineares de 1ª ordem

As EDO's lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t).$$

### Técnica do Fator Integrante

Multiplicamos a equação por **fator integrante** função  $\mu(t)$

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t).$$

# EDO's Lineares de 1ª ordem

As EDO's lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t).$$

## Técnica do Fator Integrante

Multiplicamos a equação por **fator integrante** função  $\mu(t)$

$$\mu(t)y'(t) + \underbrace{\mu(t)p(t)}_{\mu'(t)}y = \mu(t)q(t).$$

$$\Rightarrow (\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t)$$

Que pode ser resolvida por integração direta. O **fator integrante**  $\mu(t)$  pode ser obtido por

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

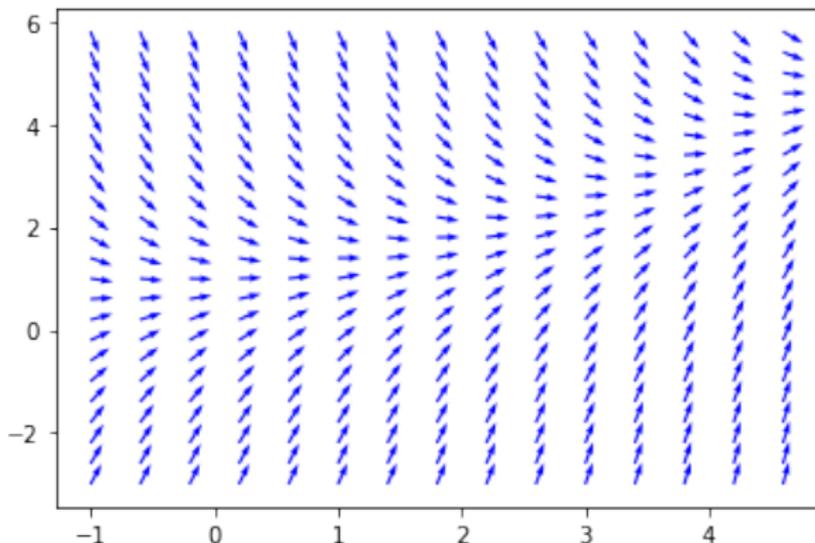


## Exemplo

Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}.$$

Encontre a solução particular que passa pelo ponto  $(0, 1)$ .

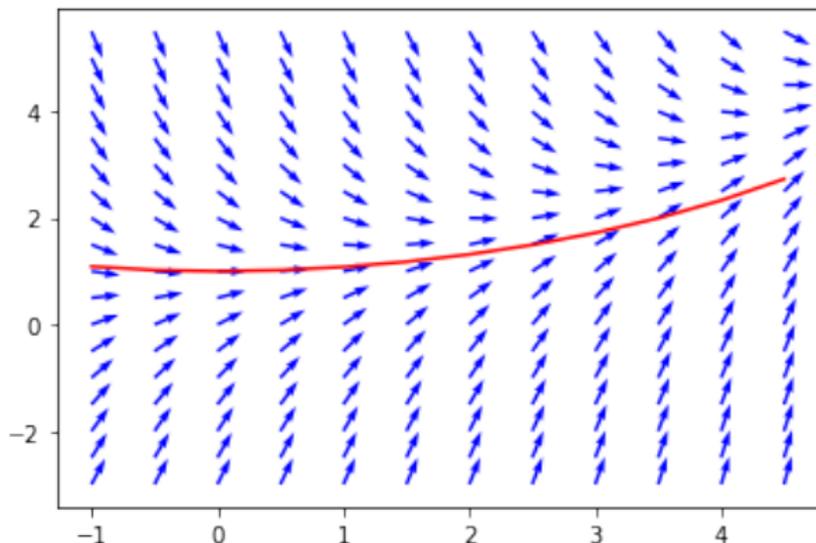


## Exemplo

Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}.$$

Encontre a solução particular que passa pelo ponto  $(0, 1)$ .



# Queda Livre com Resistência do ar

Sejam um corpo de massa  $m$  que está caindo e que sofre uma **força de resistência do ar que é proporcional à velocidade do corpo**. Adotando-se o referencial positivo para baixo, a velocidade satisfaz a equação:

$$mv' + kv = mg$$



## Exemplo

Um pára-quedista com o seu pára-quedas pesam 70 quilogramas e salta de uma altura de 1400 metros. O pára-quedas abre automaticamente após 5 segundos de queda. Sabe-se que a velocidade limite é de  $5 \text{ m/s}$ . Determine a velocidade que o pára-quedista atinge no momento que o pára-quedas abre. Quanto tempo demora para a velocidade chegar a  $5,1 \text{ m/s}$ . Como varia a altura em função do tempo?





## Para Casa 2

- 1 Determine a solução geral da EDO:  $y' - 2y = 4 - t$
- 2 Resolva o PVI

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

- 3 Determine uma fórmula geral para as soluções da EDO:  
 $y' + ay = g(t)$ , onde  $a$  é uma constante.



# Equações Exatas

Uma EDO de 1ª ordem

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

é dita **equação diferencial exata** quando existe uma função  $\psi$  tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial y} = N.$$

Neste caso, podemos reescrever a EDO da forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Supondo que  $y$  é uma função de  $x$ , pela regra da cadeia para várias variáveis, temos que

$$\frac{d}{dx}(\psi(x, y(x))) = 0,$$

Logo a solução geral da EDO é dada implicitamente por

$$\psi(x, y(x)) = C$$





## Exemplo

Resolva a EDO:  $2x + y^2 + 2xyy' = 0$ .

## Teorema 2

Suponha que  $M$ ,  $N$ ,  $\frac{\partial M}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial x}$  são contínuas num retângulo  $[a, b] \times [c, d]$ , então a EDO

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$





## Exemplo

Verifique se as EDOs são exatas, em caso afirmativo, determine a solução

①  $(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$

②  $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$



## Fator Integrante: EDO exata

No caso em que a EDO não é exata, podemos tentar torná-la exata através de um fator integrante. Seja

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{com } M_y \neq N_x.$$

Pode-se obter um fator integrante  $\mu$  que torna a EDO exata, da seguinte forma:

①  $P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$  então  $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$ .

②  $Q(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$  então  $\mu(y) = e^{\int Q(y) dy}$ .



### Exemplo

Determine o fator integrante que torne a seguinte EDO exata.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$



## Para Casa 3

Encontre a solução geral das EDO's:

$$\textcircled{1} (3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

$$\textcircled{2} \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1$$



# Existência e Unicidade de Soluções

Ao se trabalhar com equações diferenciais duas perguntas são naturais:  
Um problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sempre tem solução? Se sim essa solução é única?



## Exemplo

O problema

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções! Para todo  $c \geq 0$  são soluções do PVI

$$y(t) = \begin{cases} (t - c)^2, & t \geq c \\ 0, & t < c. \end{cases}$$

# Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Lineares

## Teorema 3

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Se  $p(t)$  e  $q(t)$  são *contínuas* em um intervalo  $I$  contendo  $t_0$ , então o PVI tem uma *única solução* em  $I$ .





## Exemplo

Considere o PVI:

$$\begin{cases} t^3 \frac{d}{dt} y(t) + 4t^2 y(t) = e^{-t}, \\ y(-1) = 0. \end{cases}$$

- 1 Determine o maior intervalo onde a solução do PVI existe.
- 2 Encontre a solução do PVI.



# Teorema de Existência e Unicidade de Soluções Geral

## Teorema 4

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se  $f(t, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são *contínuas* em um retângulo

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; a < t < b, c < y < d\}$$

contendo  $(t_0, y_0)$ , então o PVI *tem uma única solução* em um intervalo contendo  $t_0$ .





## Exemplo

- 1 A única solução do problema

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

é  $y = \frac{1}{t+1}$  definida no intervalo  $(-\infty, -1)$ . Note que não existe uma solução definida em toda a reta!

- 2 O problema

$$\begin{cases} y' = \text{sen}(ty) + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem solução?



# Uma breve introdução aos números complexos<sup>1</sup>

O conjunto dos **números complexos**, denotado por  $\mathbb{C}$ , são formados pelos elementos da forma

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{com } i^2 = -1,$$

onde estão definidas as operações de adição e multiplicação:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$



## Exemplo

Calcule  $(-1 + 3i)(2 - 5i)$

<sup>1</sup>Veja o apêndice do livro James Stewart, Cálculo Volume 1.



O **módulo** de  $z$  é definido por

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

O **Complexo Conjugado** de  $z = a + bi$  é

$$\bar{z} = a - bi.$$

## Propriedades

- 1  $z\bar{z} = |z|^2$ .
- 2  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$  e  $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- 3 Se  $z$  é raiz de um polinômio, então  $\bar{z}$  também o é.





## Exemplo

- 1 Expresse o número  $\frac{-1+3i}{2+5i}$  na forma  $a + bi$ .
- 2 Encontre as raízes da equação  $x^2 + x + 1$

## Teorema 5 (Teorema Fundamental da Álgebra)

*Toda equação polinômial*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

*onde  $a_k \in \mathbb{R}$  e  $n \geq 1$ , tem exatamente  $n$  soluções no conjunto dos números complexos.*



# Forma Polar

Qualquer número complexo  $z$  pode ser escrito na **forma polar**

$$z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)),$$

onde  $r = |z|$  e  $\tan(\theta) = b/a$ . O ângulo  $\theta$  é chamado **argumento** de  $z$ .



## Exemplo

Escreva  $z = 1 + i$  e  $w = i$  na forma polar.



# Propriedades

Sejam  $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1))$   $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2))$ . Então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)),$$

## Fórmula de De Moivre

Se  $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ , então

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$





## Exemplo

- 1 Ache o produto dos números  $z = 1 + i$  e  $w = \sqrt{3} - i$  na forma polar.
- 2 Ache  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$ .
- 3 O que significa geometricamente multiplicar um número complexo  $z$  por  $i$ ?
- 4 Calcule  $\sqrt[3]{1}$  em  $\mathbb{C}$ , isto é, os valores de  $z \in \mathbb{C}$  tais que  $z^3 = 1$ .



# EDO's de 2ª ordem lineares

As EDO's de 2ª ordem linear são equações que podem ser escritas na forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t).$$

Uma EDO de 2ª ordem linear é dita **homogênea** se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (1)$$



## Exemplo

- 1 EDO Linear de 2ª ordem não-homogênea:  $y'' + 4y = e^t \sin t$
- 2 EDO Linear de 2ª ordem homogênea:  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$
- 3 EDO não-Linear de 2ª ordem:  $yy'' + y' = 0$



## Teorema 6 (Teorema de Existência e Unicidade das Soluções)

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Se  $p(t)$ ,  $q(t)$  e  $f(t)$  são funções contínuas em um intervalo  $I$  contendo  $t_0$ , então o PVI tem *uma única solução definida neste intervalo*.



### Exemplo

Encontre o maior intervalo no qual a solução do PVI certamente existe.

$$\begin{cases} (t^2 - 3t)y'' + ty' - (t + 3)y = 0 \\ y(1) = 2, y'(1) = 1. \end{cases}$$



# EDOs Lineares Homogêneas

## Princípio da Superposição de Soluções

Para **EDO's lineares homogêneas**, se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da equação definidas em um mesmo intervalo, então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

também o é, para quaisquer constantes  $c_1$  e  $c_2$ .



## Exemplo

Mostre que  $y_1(x) = x$  e  $y_2(x) = x^3$  são soluções da EDO mas não são soluções do PVI.

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \\ y(1) = 2, y'(1) = 1. \end{cases}$$



## Para Casa 4

Mostre que:

- ① As funções  $y_1 = \cos x$  e  $y_2 = \sin x$  são soluções da EDO

$$y'' + y = 0$$

- ② As funções  $y_1 = 1 + \cos x$  e  $y_2 = 1 + \sin x$  são soluções da EDO

$$y'' + y = 1,$$

mas  $y_1 + y_2$  não é.

- ③ As funções  $y_1 = x^2$  e  $y_2 = 1$  são soluções da EDO

$$y''y - xy' = 0,$$

mas  $y_1 + y_2$  não é.



# Soluções Fundamentais

No último exemplo vimos que  $y_1(x) = x$  e  $y_2(x) = x^3$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$  são soluções da EDO  $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$  mas não do PVI

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 3y = 0 \\ y(1) = 2, y'(1) = 1. \end{cases}$$

Será possível determinar uma solução do PVI a partir dessas duas? E uma solução geral da EDO?



# Wronskiano

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Se  $p(t)$  e  $q(t)$  são contínuas, então o procedimento do exemplo anterior pode ser aplicado. Dados  $y_1$  e  $y_2$  duas da EDO, então o PVI terá solução desde que

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix}.$$

$W[y_1, y_2](t_0)$  é chamado de **Wronskiano**.



## Teorema 7

Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da EDO

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

e se existe  $t_0$  tais que  $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ , então a família de funções

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

incluem todas as soluções da EDO, chamada *solução geral* da EDO. Neste caso,  $y_1$  e  $y_2$  são ditas *soluções fundamentais*.



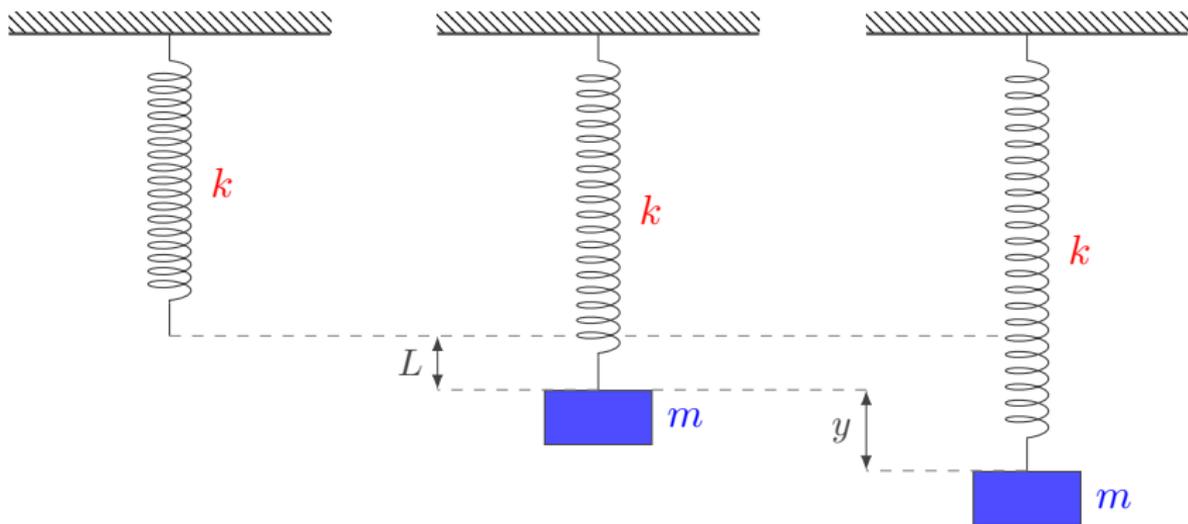
### Exemplo

Mostre que  $y_1 = t^{1/2}$  e  $y_2 = t^{-1}$  são soluções fundamentais da EDO

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0$$

e determine a solução geral.

# Vibrações Mecânicas Amortecidas



Considere um sistema de massa-mola composto de um corpo de massa  $m$  preso a uma mola, com constante elástica  $k$ , que está presa ao teto. Se levarmos em conta um amortecimento viscoso proporcional à velocidade do corpo, então o sistema satisfaz a EDO

$$my'' + \gamma y' + ky = 0,$$

onde  $\gamma > 0$  é a constante de amortecimento.



# Equações homogêneas com coeficientes constantes

Uma EDO linear de 2ª ordem, homogênea, com coeficientes constantes é uma equação da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (2)$$

Para resolver uma equação do tipo (2) vamos nos inspirar no caso de 1ª ordem. Uma EDO linear homogênea de 1ª com coeficientes constantes é da forma

$$ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Sabemos que as soluções para esta equação são  $y(t) = ce^{-bt/a}$ . Neste caso é natural supor que uma solução da EDO (2) seja da forma  $y(t) = e^{\lambda t}$  para alguma constante  $\lambda$ . Daí, substituindo em (2) temos que

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

A última equação é dita **equação característica**.



# Raízes Reais Distintas

## Exemplo

Determinar a solução geral da EDO:  $y'' + y' - 2y = 0$ .

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes distintas da equação característica, então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, t \in \mathbb{R}.$$





## Exemplo

Determinar a solução geral da EDO:  $y'' + 4y' + 4y = 0$

Se  $\alpha$  é a única raiz da equação característica, então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t}, t \in \mathbb{R}.$$



Vamos estudar inicialmente o caso

$$y'' + \beta^2 y = 0,$$

cujas soluções fundamentais são  $y_1 = e^{i\beta t}$  e  $y_2 = e^{-i\beta t}$ . Mas como podemos escrevê-las na forma padrão  $a + bi$ ?

Primeiramente, note que  $u_1(t) = \cos(\beta t)$  e  $u_2(t) = \text{sen}(\beta t)$  também são soluções fundamentais da EDO. Portanto,

$$y_1(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \text{sen}(\beta t).$$



# A exponencial complexa

Até agora temos que

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{i\beta t} \\ y_1(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t). \end{cases}$$

Como  $y_1(0) = 1$  e  $y_1'(0) = i\beta$ , daí, temos que  $c_1 = 1$  e  $c_2 = i$ . Logo,

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t).$$

Em particular, para  $t = 1$ , temos que

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta).$$



Curiosamente, quando  $\beta = \pi$ , obtemos a mais bela de todas as equações da matemática:

## Equação de Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

De forma geral, obtemos:

$$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} e^{\beta i} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta),$$

conhecida como fórmula de Euler.





## Exemplo

Determine a solução geral da EDO :  $y'' - 4y' + 13y = 0$ .

Se  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  e  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ , então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sen(\beta t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Vimos que o modelo para um sistema massa-mola preso no teto em um meio viscoso é:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0,$$

onde  $m$  é a massa,  $k > 0$  é a constante elástica e  $\gamma > 0$  é a constante de amortecimento.



# Vibrações livres não-amortecidas

Quando  $\gamma = 0$ , o sistema não tem amortecimento e podemos reescrever a equação:

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

onde  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Com isso a solução geral é:

$$y = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A solução pode ser reescrita como:

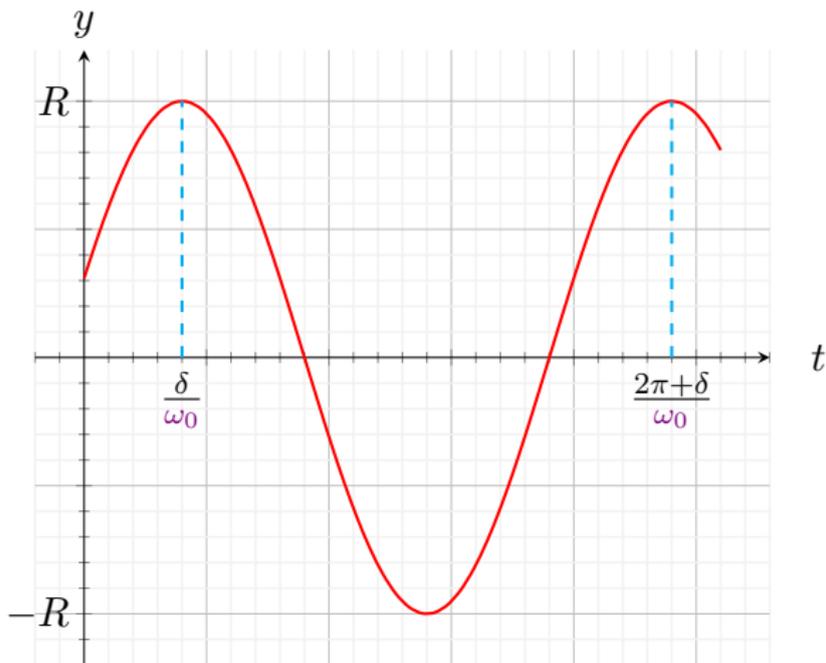
$$y = R \cos(\omega_0 t - \delta),$$

onde  $A = R \cos \delta$ ,  $B = R \sin \delta$ . O **período** do movimento é  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , a **frequência** é  $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , a **amplitude** é  $R$  e o parâmetro adimensional  $\delta$  é chamado de **fase**.

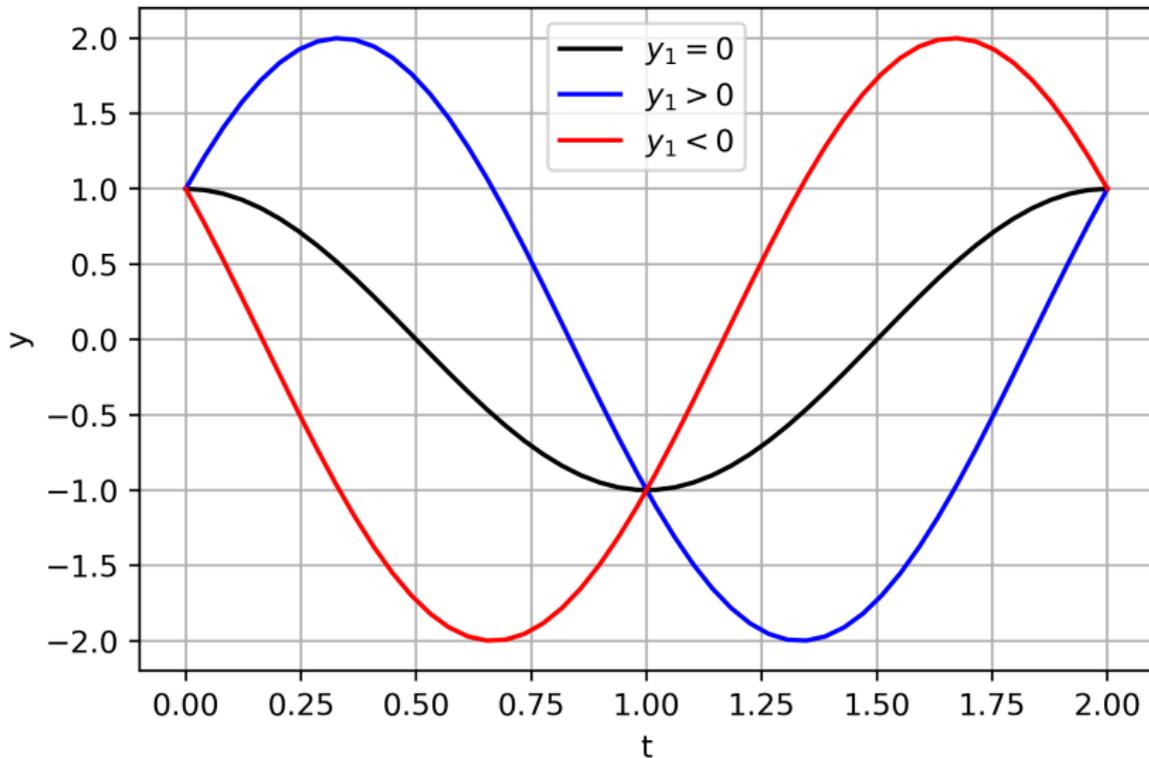


O movimento descrito é chamado **movimento harmônico**.

$$y = R \cos(\omega_0 t - \delta)$$



### Movimento Harmônico com $y_0 = 1$ e $\omega_0 = \pi$ .



# Vibrações Livres Amortecidas

Quando o sistema é amortecido temos a equação:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0.$$

Donde temos a equação característica:

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0,$$

cujas raízes são:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m},$$

o que nos fornece 3 casos:

- 1 **Superamortecimento:**  $\gamma^2 > 4mk$
- 2 **Subamortecimento:**  $\gamma^2 < 4mk$
- 3 **Amortecimento Crítico:**  $\gamma^2 = 4mk$

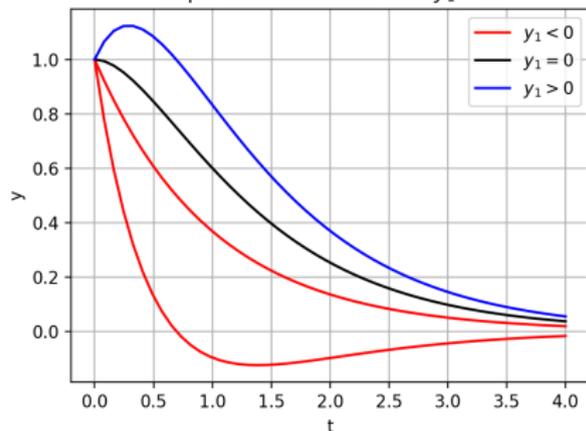


# Superamortecimento

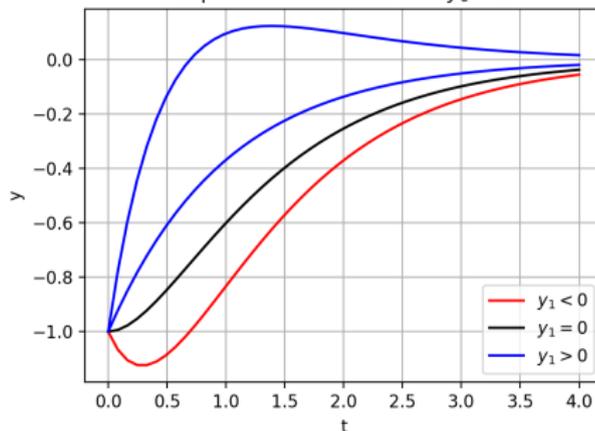
$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

Superamortecimento com  $y_0 > 0$ .



Superamortecimento com  $y_0 < 0$ .



# Subamortecimento

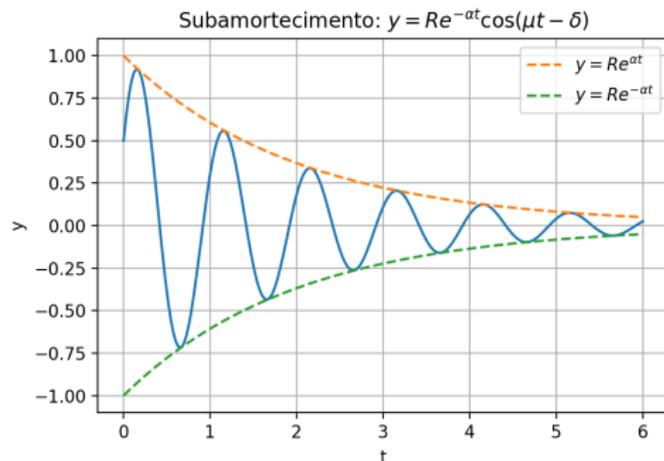
A solução é da forma

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} (A \cos(\mu t) + B \operatorname{sen}(\mu t)),$$

onde  $\mu = \frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}$ . Que pode ser reescrita como

$$y(t) = R e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos(\mu t - \delta),$$

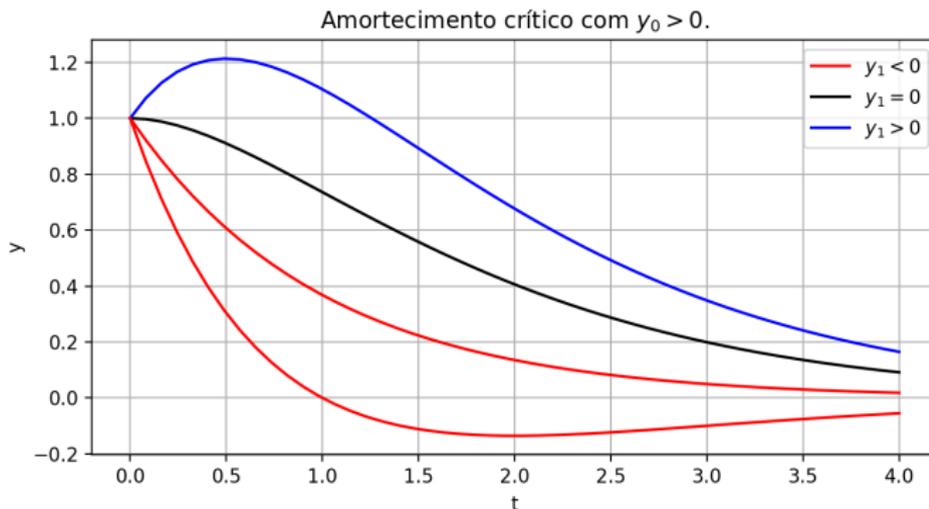
onde  $A = R \cos \delta$  e  $B = R \operatorname{sen} \delta$ .



# Amortecimento crítico

A solução é da forma

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma t}{2m}}.$$





## Para Casa 5

Esboce os gráficos das soluções dos problemas abaixo.

- 1 Suponha que uma massa de 4,5 kg estica uma mola  $x_5$ cm. A massa é deslocada 2,5 cm para baixo e depois colocada em movimento com uma velocidade inicial de apontando para cima de 30 cm/s.
- 2 Uma massa de 20g estica uma mola 5 cm. Suponha que a massa também está presa a um amortecedor viscoso com uma constante de amortecimento de 400 dinas·s/cm e que a massa é puxada pra baixo mais 2 cm de depois é solta.



# Equações não-homogêneas

É fácil ver que se  $y_p(t)$  é uma solução de uma EDO não-homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

$y_1$  e  $y_2$  são soluções fundamentais da EDO homogênea correspondente, então a solução geral da equação não-homogênea é

$$y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$





## Exemplo

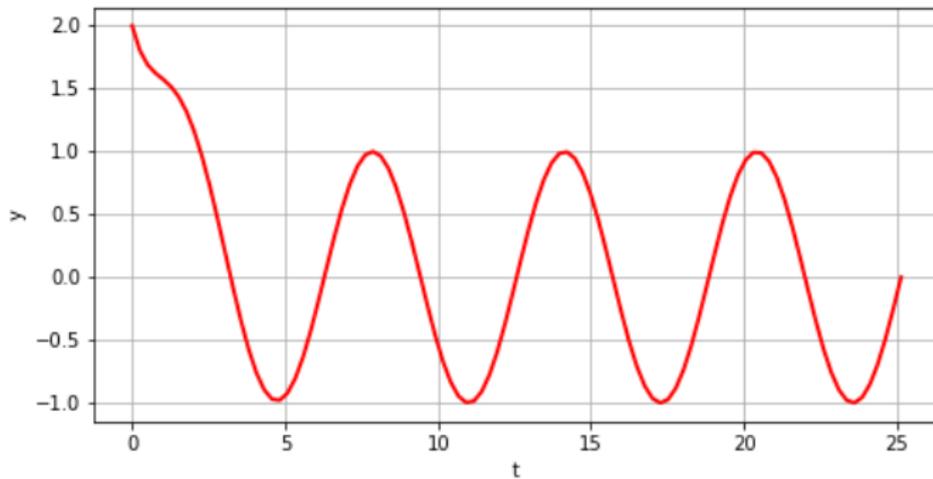
Se no modelo de vibrações mecânicas existir uma força externa  $F = F(t)$ , então teremos um problema de **oscilação forçada** que é modelado pela seguinte equação não-homogênea:

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t).$$

Neste caso, como determinar a solução do seguinte problema cuja força externa é periódica?

$$y'' + 2y' + y = 2 \cos(t).$$





# Método dos Coeficientes a Determinar

Este método funciona para qualquer EDO não-homogênea com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = F_1(t) + F_2(t) + \cdots + F_k(t),$$

onde

$$F_i(t) = e^{\alpha t}[(a_0 + \dots + a_n t^n) \cos(\beta t) + (b_0 + \dots + b_m t^m) \operatorname{sen}(\beta t)].$$

Neste caso, deve-se procurar, para cada  $F_i$ , uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s e^{\alpha t}[(A_0 + \dots + A_q t^q) \cos(\beta t) + (B_0 + \dots + B_q t^q) \operatorname{sen}(\beta t)],$$

em que  $q = \max\{n, m\}$ ,  $s$  é o menor inteiro não-negativo que garante que nenhuma parcela de  $y_p$  seja solução da equação homogênea correspondente e  $A_0, \dots, A_q, B_0, \dots, B_q$  são coeficientes a serem determinados.





## Exemplo

Encontre a solução geral das seguintes equações:

- a  $y'' + y' = 2 + t^2$ .
- b  $y'' - 2y' + y = e^t + t$
- c  $y'' + 4y = e^t \cos t$



# Vibrações Mecânicas Forçadas

conteúdo...



# Método da Variação dos Parâmetros

Este método funciona para qualquer EDO linear de 2ª ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

para o qual se conheça duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente em um intervalo  $I$  onde o wronskiano é não nulo.

Sabemos que a solução geral da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

O método da variação dos parâmetros consiste em procurar uma solução particular da EDO não homogênea que tenha a forma da solução geral da homogênea, mas substituindo os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  por funções a determinar  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , respectivamente, ou seja, da forma

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t),$$

com a condição de que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0$$



# Fórmula Geral

Resolvendo-se o sistema anterior, chega-se a:

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt, \quad \text{e } u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$



## Exemplo

Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + y = \sec t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2. \end{cases}$$





## Exemplo

- 1 Determine a solução geral das EDO

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos^3(x)}.$$

- 2 Verifique que  $y_1(t) = t^2$  e  $y_2(t) = t^{-1}$  são soluções fundamentais da EDO no intervalo  $(0, \infty)$

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1$$

e determine a solução geral.

